Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
26. April 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 6

Aufgabe 21*. Für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$ und jedes Polynom $q \in \mathbb{P}_p$ sowie festes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\int_x^{x+h} q\,dt = h\Phi(x, q(x), h)$, d.h. das Runge-Kutta-Verfahren induziert eine Quadraturformel vom Exaktheitsgrad p.

Aufgabe 22. Welche Quadraturformel wird durch das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung induziert? Welche Quadraturformel wird durch das modifizierte Euler-Verfahren aus Aufgabe 20 induziert?

Aufgabe 23. Es sei $p \in \mathbb{N}$ die Konsistenzordnung eines s-stufigen, expliziten Runge-Kutta-Verfahrens. Dann gilt die sogenannte **Butcher-Schranke** $p \leq s$.
Hinweis. Man betrachte das Anfangswertproblem $y' = y$ auf $[0, 1]$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 24*. Gegeben sei ein (explizites) Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 1. Unter den Voraussetzungen des Konvergenzsatzes erhalten wir einen Vektor von Approximationen $(y_0, \dots, y_n)$ mit $y_j \approx y(t_j)$, und es gilt

$$\max_{j=0,\dots,n} |y - y_j| = \mathcal{O}(h).$$

Für die Visualisierung betrachten wir den Interpolationsspline $y_h \in S_0^1(\Delta)$ mit $y_h(t_j) = y_j$ zur Zerlegung $\Delta = (t_0, \dots, t_n)$. Man zeige, dass dann ebenfalls gilt

$$\|y - y_h\|_\infty = \mathcal{O}(h).$$

Aufgabe 25. Gegeben sei ein (explizites) Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 4. Die rechte Seite f erfülle wieder die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes. Wie kann man aus einem Vektor $(y_1, \dots, y_n)$ von Approximationen $y_j \approx y(t_j)$ mit

$$\max_{j=0,\dots,n} |y - y_j| = \mathcal{O}(h^4).$$

einen Spline y_h erhalten, sodass gilt

$$\|y - y_h\|_\infty = \mathcal{O}(h^4).$$

Programmieraufgabe 8. Man implementiere das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung in einer MATLAB-Funktion

```
y = rk4(f,y0,t)
```

der als Eingabeparameter das Funktionshandle der rechten Seite `fxy = f(x,y)`, der Anfangswert y_0 sowie der Vektor der Stützstellen $t = (t_0, \dots, t_n)$ übergeben werde. Dabei darf die unbekannte Lösung auch vektorwertig sein, d.h. $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ist ein Spaltenvektor.

Programmieraufgabe 9. Auf $[0, 1]$ betrachte man die rechte Seite $f(x, y) = (11/10)\, x^{1/10}$ und den Anfangswert $y_0 = 0$. Für eine Folge uniformer Netze (Δ_n) mit $n + 1$ Stützstellen plotte man den Fehler $|y_n - y(1)|$ in Abhängigkeit von n geeignet. Welche Konvergenzordnung beobachtet man für das Runge-Kutta-Verfahren aus der Programmieraufgabe 8? Wie kann man die Netze Δ_n wählen, damit man eine bessere Konvergenzordnung bzw. sogar die optimale Konvergenzordnung 4 erhält?
Hinweis. Man überlege sich zunächst, wo die Lösung y nicht glatt ist. Dort erwarten wir, dass wir dichtere Netzweiten nehmen müssen, um die Singularität in den Ableitungen auszugleichen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 02.05.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 03.05.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 03.05.2006 vorzubereiten.