Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
03. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 7

Aufgabe 26. Auf $[0, 1]$ betrachte man die rechte Seite $f(x, y) = (11/10)\, x^{1/10}$ und den Anfangswert $y_0 = 0$. Für ein fixe Graduierung $\beta > 0$ betrachten wir Netze $\Delta_n = (t_0, \dots, t_n)$ mit $t_j = (j/n)^\beta$. Zur Diskretisierung verwenden wir das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung. Welches Konvergenzverhalten $\mathcal{O}((1/n)^\alpha)$ erhält man für eine Folge uniformer Netze, d.h. für die Wahl $\beta = 1$? Wie muß man β wählen, damit das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung mit Ordnung $\mathcal{O}((1/n)^4)$ konvergiert.
Hinweis. Die Problemstellung ist äquivalent zur numerischen Quadratur der Funktion $q(x) = (11/10)\, x^{1/10}$ über das Intervall $[0, 1]$. Das ERK(4) ist gerade die Simpson-Regel, sodass die elementweisen Fehler für $[t_{j-1}, t_j]$ explizit berechnet werden können. Zur Abschätzung der Fehlerterme verwende man den Mittelwertsatz.

Programmieraufgabe 10. Man implementiere das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung mit adaptiver Schrittweitensteuerung, basierend auf einer $(h, h/2)$-Strategie. Dazu schreibe man eine Matlab-Funktion

```
[t,y] = rk4adaptive(f,y0,a,b,eps)
```

der als Eingabeparameter das Funktionshandle der rechten Seite `fxy = f(x,y)`, der Anfangswert y_0, die Intervallgrenzen a und b des Zeitintervalls $[a, b]$ sowie die Genauigkeit $\varepsilon > 0$ übergeben werden. Dabei darf die unbekannte Lösung auch vektorwertig sein, d.h. $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ist ein Spaltenvektor. Um den Programmcode zu testen, betrachte man die Van-der-Pol-Gleichung $y'' = \mu\,((1 - y^2)y' - y)$ mit Parameter $\mu = 20$ und Startwert $(y(0), y'(0)) = (2, -2/3)$ auf dem Intervall $[0, 4]$.

Programmieraufgabe 11. Man betrachte das Quadraturproblem aus Aufgabe 26 und visualisiere die gewählte Toleranz sowie den Fehler (beides auf der y-Achse in logarithmischer Skalierung) über der Anzahl Punkte $\#t$ des Netzes (auf der x-Achse in logarithmischer Skalierung). Desweiteren visualiere man den Fehler über $\#t$ für graduierte Gitter aus Aufgabe 26. Zum Vergleich visualisiere man die erwartete Konvergenzordnung $\mathcal{O}((1/n)^4)$ geeignet. Der Plot (4 Konvergenzgraphen in einem Bild) ist im eps-Format abzugeben.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 09.05.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 10.05.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 10.05.2006 vorzubereiten.