Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
10. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 8

Aufgabe 27*. Die Funktion $f(x,y)$ sei Lipschitz-stetig im y-Argument. Man beweise, dass für ein implizites Runge-Kutta-Verfahren und hinreichend kleine Schrittweite $h \in (0, h_0)$ die Stufen $k_1, \ldots, k_s$ eindeutig sind.

Aufgabe 28*. Man beweise, dass für ein s-stufiges implizites Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung p die Abschätzung $p \leq 2s$ gilt.
Hinweis. Man denke noch einmal über den Zusammenhang von Runge-Kutta-Verfahren und Quadratur nach.

Aufgabe 29. Es sei $\Phi(x,y,h)$ die Verfahrensfunktion eines expliziten Einschrittverfahrens der Ordnung $q \geq 1$, die in y Lipschitz-stetig mit Konstante L und ferner $(s+1)$-mal stetig differenzierbar sei. Zu einer gegebenen rechten Seite $f(x,y)$ in C^s und einer Lösung $y \in C^{s+1}$ von $y' = f(x,y)$ in $[a,b]$ erfülle der Verfahrensfehler

$$\tau(x,y,h) = d(x)h^{q+1} + \mathcal{O}(h^{q+2})$$

mit einer Funktion $d \in C^s$. Dann existiert eine Funktion $c \in C^{s+1}$ mit $c(a) = 0$, sodass für das Einschrittverfahren zur Verfahrensfunktion

$$\Phi^*(x,y,h) := \Phi(x, y - c(x)h^q, h) + [c(x+h) - c(x)]h^{q-1}$$

folgende Aussagen gelten:

(i) $\Phi^*(x,y,h)$ ist Lipschitz-stetig in y mit derselben Konstante L wie $\Phi(x,y,h)$.

(ii) $\Phi^*(x,y,h)$ induziert ein Verfahren der Ordnung $q+1$.

(iii) Es gilt $y_\ell^* = y_\ell + c(x_\ell)h^q$, wobei y_ℓ^* die Folge der Approximation bezüglich Φ^* und y_ℓ die Folge der Approximationen zu festem $h > 0$ bezüglich Φ seien.

Hinweis. (i) ist elementar und (iii) folgt mittels Induktion. Die Existenz von $c(x)$ folgt im Beweis von (ii): Man schreibe sich den Verfahrensfehler hin und stelle fest, dass $c(x)$ eine gewisse Differentialgleichung erfüllen muss, wenn $\tau^*(x,y,h) = \mathcal{O}(h^{q+2})$ gelten soll.

Aufgabe 30. Es sei $\Phi(x,y,h)$ die Verfahrensfunktion eines expliziten Einschrittverfahrens der Ordnung $p \geq 1$, die in y Lipschitz-stetig mit Konstante L sei. Die Funktionen $f(x,y)$ und $\Phi(x,y,h)$ seien C^{p+r} und $\Phi(x,y,h)$ sei ferner C^{p+r+1} in h. Dann existieren Funktionen $c_j \in C^{r+2-j}$ mit $c_j(a) = 0$, sodass für den Diskretisierungfehler gilt

$$y(x_\ell) - y_\ell = \sum_{j=1}^{r} c_j(x_\ell) h^{p+j-1} + \mathcal{O}(h^{p+r}).$$

Hinweis. Man verwende iterativ Aufgabe 29.

Programmieraufgabe 12. Wir betrachten ein (explizites oder implizites) Runge-Kutta-Verfahren, gegeben in Form der (Zeilen-) Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^s$ und der Matrix $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$ aus dem Butcher-Schema. Für eine lineare Differentialgleichung mit rechter Seite $f(x,y) = M(x)y + g(x)$ soll eine MATLAB-Funktion

```
y = rk(A,b,c,y0,M,g,x)
```

implementiert werden, die das Runge-Kutta-Verfahren realisiert. Dabei sind y_0, M und g die Problemdaten und $x \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der Stützstellen. Der Einfachheit halber dürfen Sie annehmen, dass die Differentialgleichung skalarwertig ist, d.h. $y : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Funktion liefere den Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ der Approximationen zurück.

Programmieraufgabe 13. Zum Testen der Funktion `rk` aus Programmieraufgabe 12 verwende man das Problem $y' = y$ in $[0,10]$ und $y'(0) = 1$. Für uniforme Netze mit $n+1$ Knoten verwende man das explizite und das implizite Euler-Verfahren, das modifizierte Euler-Verfahren sowie das Gauß-Verfahren der Ordnung 2 und plotte die Fehler geeignet über n. Zusätzlich plotte man die jeweils erwarteten Konvergenzordnungen. Der Plot (8 Konvergenzgraphen in einem Bild) ist im eps-Format abzugeben.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 09.05.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 10.05.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 10.05.2006 vorzubereiten.