Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
17. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 9

Aufgabe 31*. Zu gegebenen Stützstellen $h_0 > \cdots > h_m \in [0,1]$ und Funktionswerten $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{R}$ existieren eindeutige $d_0, \dots, d_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$p(h) := d_0 + \sum_{j=1}^{m} d_j h^{j+q-1}$$

die Interpolationseigenschaft

$$p(h_j) = \Phi(h_j) \quad \text{für alle } j = 0, \dots, m$$

besitzt. Der induzierte Operator $\mathbb{P} : C[0,1] \to X := \operatorname{span}\{x^\ell \mid \ell \in \{0, q, \dots, q+m\}\}$ ist eine lineare Projektion. Deshalb gilt für $f \in C[0,1]$ die Abschätzung

$$\|f - \mathbb{P}f\|_\infty \leq (1+\Lambda) \inf_{\widetilde{p} \in X} \|f - \widetilde{p}\|_\infty,$$

wobei Λ die Operatornorm von $\mathbb{P}$ sei.

Aufgabe 32. Gegeben sei eine Funktion $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit asymptotischer Entwicklung

$$\Phi(h) = c_0 + \sum_{j=1}^{m} c_j h^{j+q-1} + \mathcal{O}(h^{q+m}).$$

Es seien $h_0 > \cdots > h_m \in (0,1]$ und $n_j \in \mathbb{N}$ mit $h_j = h_0/n_j$, und p sei das Interpolationspolynom aus Aufgabe 31. Dann gilt $|\Phi(h) - p(h)| = \mathcal{O}(h^{q+m})$, wobei die Konstante von den n_j abhängen darf.

Aufgabe 33. Wie kann man Aufgabe 32 zur Extrapolation von Einschrittverfahren verwenden? Man verdeutliche die Vorgehensweise und das Ergebnis anhand des expliziten Euler-Verfahrens.

Aufgabe 34. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \text{ auf } [a,b] \text{ mit } y(a) = y_0,$$

wobei die Funktion $f(x,y)$ Lipschitz-stetig in y sei. Zur Approximation verwenden wir ein **Kollokationsverfahren** zu einer gegebenen Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$. Mit Stützstellen $0 \leq c_1 < \cdots < c_s \leq 1$ ist ein Spline $y_h \in \mathbb{S}_0^s(\Delta)$ gesucht mit $y_h(a) = y_0$ und $y_h'(x_i + c_j h) = f(x_i + c_j h, y_h(x_i + c_j h))$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $j = 1, \dots, s$. Man zeige, dass der Kollokationsspline $y_h \in \mathbb{S}_0^s(\Delta)$ eindeutig existiert, wenn die lokale Netzweite h hinreichend klein ist.

Aufgabe 35. Man zeige, dass das Kollokationsverfahren aus Aufgabe (34) ein s-stufiges implizites Runge-Kutta-Vefahren ist zur Verfahrensfunktion $\Phi(x, y, h) = y_h(x+h) - y_h(x)$. Geben Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^s$ an.
Hinweis. Für die Stufen des Runge-Kutta-Verfahrens gilt $k_j = y_h'(x + c_j h)$.

Aufgabe 36*. Man zeige, dass das Kollokationsverfahren aus Aufgabe 34–35 ein Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung (mindestens) s ist, wenn die Funktion $f(x, y)$ hinreichend glatt und Lipschitz-stetig in y ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 16.05.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung vorzubereiten.