

Serie 2

Abgabe: bis Fr., 14.3.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

- 2.1. (schriftlich)** Für hinreichend glatte Funktionen f bezeichnet $t \mapsto y_{t_0, y_0}(t)$ die (eindeutige) Lösung des AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Ziel der Aufgabe ist, die stetige Differenzierbarkeit der Funktion $y_0 \mapsto y_{t_0, y_0}(t)$ zu zeigen. Genauer: die Funktion $R(t) := \frac{\partial}{\partial y_0} y_{t_0, y_0}(t)$ ist die Lösung des *linearen* AWP

$$R'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0, y_0}(t)) R(t), \quad R(t_0) = 1. \tag{2}$$

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in C^2(G, \mathbb{R})$. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$ und $y_{t_0, y_0} \in C^1(J, \mathbb{R})$ die Lösung des AWP (1). Zeigen Sie mit Satz 1.5 der Vorlesung, daß für $\Delta_h(t) = \frac{1}{h} (y_{t_0, y_0+h}(t) - y_{t_0, y_0}(t))$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h(t) = R(t), \quad t \in J.$$

- 2.2.** Zeigen Sie das *diskrete Gronwall-Lemma*: Seien $(e_i)_{i=0}^N, (\eta_i)_{i=0}^N, (\delta_i)_{i=0}^N$ drei Folgen mit nicht-negativen Elementen, die

$$e_{i+1} \leq (1 + \delta_i)e_i + \eta_i, \quad i = 0, \dots, N-1$$

erfüllen. Dann ist

$$|e_i| \leq \left(e_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_j \right) e^{\sum_{j=0}^{i-1} \delta_j} \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{Konvention: leere Summe} = 0)$$

- 2.3.** Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y) \text{ in } [a, b], \quad y(a) = y_0$$

wird ein explizites Einschrittverfahren verwendet gemäß der Rekursion

$$y_{\nu+1} = y_{\nu} + h_{\nu} \Phi(t_{\nu}, y_{\nu}, h_{\nu}) \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Weiters sei \tilde{y}_{ν} eine Folge, die dadurch entsteht, daß in jedem Schritt eine Störung gemacht wird (z.B. durch Rundungsfehler):

$$\tilde{y}_{\nu+1} = \tilde{y}_{\nu} + h_{\nu} \Phi(t_{\nu}, \tilde{y}_{\nu}, h_{\nu}) + \varepsilon_{\nu}.$$

Nehmen Sie, daß die Störungen ε_{ν} die Abschätzung $|\varepsilon_{\nu}| \leq \varepsilon$ für alle ν erfüllen. Zeigen Sie: Ist die Inkrementfunktion $\Phi(t, y, h)$ Lipschitz-stetig in y mit Lipschitzkonstante $L > 0$, so gilt

$$|y_{\nu} - \tilde{y}_{\nu}| \leq (|y_0 - \tilde{y}_0| + \nu\varepsilon) \exp(L|t_{\nu} - t_0|), \quad \nu = 0, \dots, N.$$

- 2.4. (Programmieraufgabe 2.4)**

Das explizite Eulerverfahren ist durch $y_{\nu} = y_{\nu-1} + hf(t_{\nu-1}, y_{\nu-1})$ definiert. Implementieren Sie für den Spezialfall $f(t, y) = M(t)y + g(t)$ das explizite Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = (b - a)/N$ zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y) \text{ in } [a, b], \quad y(a) = y_0.$$

Dabei kann die gesuchte Lösung $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorwertig sein, $M(t)$ ist in diesem Fall eine $n \times n$ Matrix. Der MATLAB-Funktion

$$[t,y] = \text{euler}(a,b,N,y_0,M,g)$$

soll neben den Daten a , b , N und y_0 auch die Function-Handles der Funktionen $Mt=M(t)$ und $gt=g(t)$ übergeben werden. Die übergebenen Funktionen können dann beispielsweise mit $Mt=\text{feval}(M,t)$ aus der Funktion `euler` heraus aufgerufen werden. Als Rückgabeparameter liefere die Funktion `euler` den Stützstellenvektor $t \in \mathbb{R}^{N+1}$ und die Matrix der dazugehörigen Funktionswerte $y \in \mathbb{R}^{n \times (N+1)}$, d.h. die $\nu + 1$ -te Spalte von y entspricht der Approximation y_ν an der Stelle t_ν .

2.5. (Programmieraufgabe 2.5)

Das implizite Eulerverfahren ist durch $y_\nu = y_{\nu-1} + hf(t_\nu, y_\nu)$ definiert. Schreiben Sie unter denselben Voraussetzungen wie in der Programmieraufgabe 2.4 eine MATLAB-Funktion

$$[t,y] = \text{ieuler}(a,b,N,y_0,M,g)$$

die das implizite Eulerverfahren realisiert. Vergleichen Sie die Fehler $|y(1) - y_N(1)|$ für explizites und implizites Eulerverfahren im Plot über $N = 2^i$, $i = 1, \dots, 10$. Als Beispiel nehmen Sie das Modellproblem

$$y' = \lambda y \text{ auf } [0, 1], y(0) = 1$$

mit exakter Lösung $y(t) = \exp(\lambda t)$ für verschiedene konstante Werte von $\lambda \in \{\pm 1, \pm 10\}$