

### Serie 3

Abgabe: bis Fr., 4.4.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

**3.1. (schriftlich)** Ein allgemeines *implizites* Einschrittverfahren ist durch die Rekursionsvorschrift

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, y_{i+1}, h_i) \tag{1}$$

gegeben. Ziel der Aufgabe ist zu sehen, daß die Konvergenztheorie für explizite Einschrittverfahren aus der Vorlesung auch für implizite Einschrittverfahren übertragen werden kann.

a) Sei  $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^4)$  und für ein  $\underline{h} > 0$  gelte

$$\sup_{t,y,z \in \mathbb{R}} \sup_{0 < h < \underline{h}} |\Phi(t, y, z, h)| + |\partial_y \Phi(t, y, z, h)| + |\partial_z \Phi(t, y, z, h)| =: M < \infty.$$

Zeigen Sie: es existiert  $\bar{h} > 0$  so daß für jedes  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h \in (0, \bar{h})$  und  $y \in \mathbb{R}$  die Aufgabe:

$$\text{Finde } z \in \mathbb{R} \text{ s.d. } z = y + h\Phi(t, y, z, h) \tag{2}$$

eine eindeutige Lösung hat.

b) Sei  $y_{ex} \in C^1(J)$  für ein offenes Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ . Definieren Sie den *Abschneidefehler*  $(t, h) \mapsto r(t, h)$  durch

$$y_{ex}(t+h) = y_{ex}(t) + h\Phi(t, y_{ex}(t), y_{ex}(t+h), h) + r(t, h), \tag{3}$$

wobei  $t \in J$  und  $h > 0$  natürlich die Bedingung  $t+h \in J$  erfüllen müssen. Es gelte

$$|r(t, h)| \leq C_{absch} h^{p+1} \quad \forall h \in (0, \bar{h}).$$

Zeigen Sie: für jedes  $h \in (0, \bar{h})$  und jedes Gitter  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$  mit  $\max_i h_i \leq h$  ist die durch (1) definierte Folge wohldefiniert, und es gibt Konstanten  $C_1, L > 0$ , welche nicht von  $h$  abhängen, so daß

$$\max_{i=0, \dots, N} |y_{ex}(t_i) - y_i| \leq C(T - t_0) e^{L(T-t_0)} h^p.$$

*Hinweis:* immitieren Sie den Beweis von Satz 2.10 der Vorlesung.

c) Seien  $J, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$  Intervalle,  $\underline{h} > 0$ . Sei  $\Phi \in C^1(J \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times (0, \underline{h}))$ . Sei  $y_{ex} \in C^1(J)$  mit  $\text{graph}(y_{ex}) = \{(t, y_{ex}(t)) \mid t \in J\} \subset J \times \mathcal{Y}$ . Zeigen Sie, daß auch für solche Inkrementfunktionen die Konvergenzaussage aus Teilaufg. b) gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion  $\tilde{\Phi} = \chi\Phi$ , wobei  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  eine geeignete Abschneidefunktion ist.

**3.2.** Sei  $\Delta = \{t_i \mid i = 0, \dots, N\}$  ein Gitter auf  $[t_0, T]$  und seien  $y_i, i = 0, \dots, N$  die Approximationen an die Lösung  $y(t_i)$ , wobei  $y$  das AWP  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  löst. Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  und  $h = \max_i h_i$ . Die Approximationen  $y_i$  sollen zu einer Funktion  $\tilde{y}$  zwischen den Knoten  $t_i$  ergänzt werden.

a) Die Funktion  $\tilde{y}$  wird als der stückweise lineare Interpolant der Approximationen gewählt, d.h.  $\tilde{y} \in S^1(\Delta)$  mit den Bedingungen  $\tilde{y}(t_i) = y_i$ . Zeigen Sie: falls  $\max_i |y(t_i) - y_i| \leq Ch$ , dann gilt für ein geeignetes  $C' > 0$

$$\|\tilde{y} - y\|_{C([t_0, T])} \leq C'h.$$

b) Bessere Approximationen als in Teilaufg. a) ergeben sich durch Interpolation mit Polynomen höherer Ordnung. Definieren Sie hierzu auf  $(t_i, t_{i+1})$  die Funktion  $\tilde{y}|_{(t_i, t_{i+1})}$  durch Hermiteinterpolation als das Polynom 3. Grades, für welches gilt

$$\tilde{y}(t_i) = y_i, \quad \tilde{y}(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad \tilde{y}'(t_i) = f(t_i, y_i), \quad \tilde{y}'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y_{i+1}),$$

Wenn Sie ein Verfahren der Ordnung  $p$  verwenden, d.h.  $\max_{i=0, \dots, N} |y(t_i) - y_i| \leq Ch^p$ , welche Genauigkeit erwarten Sie dann für  $\max_{t \in [t_0, t_N]} |y(t) - \tilde{y}(t)|$ ?

**3.3. (Programmieraufgabe 3.3)** Man implementiere das explizite Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 4 in einer MATLAB-Funktion

$$y = \text{rk4}(f, y_0, t)$$

der als Eingabeparameter das Funktionshandle der rechten Seite  $f(t,y)$ , der Anfangswert  $y_0$  sowie der Vektor der Stützstellen  $t = (t_0, t_1, \dots, t_N)$  übergeben werde. Dabei darf die unbekannte Lösung auch vektorwertig sein, dh.  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ist ein Spaltenvektor.

**3.4. (Programmieraufgabe 3.4)** Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$[p1, p2] = \text{ordnungrk4}(nmax)$$

welches die Konvergenzordnung des RK4-Verfahrens auf zwei Arten für das Modellproblem  $y' = y$  und  $t_0 = 0, y_0 = 1, T = 1$  schätzt. Das RK4-Verfahren soll die Schrittweiten  $h = 2^{-n}, n = 0, 1, \dots$  verwenden. Die Anzahl Schritte  $N$  ist durch  $T/h$  gegeben.

1. 1. Art (Bestimmung von p1): Fitten Sie tatsächlichen Fehler  $\varepsilon(h) := |y(T) - y_N|$  an ein Gesetz der Form  $\varepsilon(h) = Ch^p$ , wobei Sie die Daten für  $h = 2^{-n}, n \in \{n_{max} - 2, n_{max} - 1, n_{max}\}$  verwenden. *Hinweise:* Das Gesetz ist äquivalent zu  $\log \varepsilon(h) = \log C + p \log h$ ; `help polyfit`.
2. 2. Art (Bestimmung von p2): Betrachten Sie den geschätzten Fehler  $\tilde{\varepsilon}(h) := |y_{2N} - y_N|$ , der sich aus den Approximationen zu den Schrittweiten  $h$  und  $h/2$  ergibt. Fitten Sie wie bei der 1. Art die geschätzten Fehler  $\tilde{\varepsilon}(h)$  an ein Gesetz der Form  $\tilde{\varepsilon}(h) = Ch^p$  mittels der Werte  $h = 2^{-n}, n \in \{n_{max} - 3, n_{max} - 2, n_{max} - 1\}$ .

**3.5.** Gegeben sei das AWP

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

mit exakter Lösung  $y_1(t) = 2e^{-t} + \sin t, y_2(t) = 2e^{-t} + \cos t$ . Es soll der Fehler  $e(h) := \|y(T) - y_N\|_2$  für  $T = 1$  als Funktion der Schrittweite  $h$  (verwenden Sie uniforme Gitter) doppelt logarithmisch dargestellt werden. Vergleichen Sie das RK4-Verfahren mit dem expliziten Eulerverfahren für die Fälle  $h = 2^{-n}, n = 1, \dots, 20$  bei Verwendung von *doppelt genauer* Arithmetik und *einfacher Genauigkeit*. *Hinweis:* `help single` in MATLAB. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

**3.6.** Sei die Inkrementfunktion  $\Phi$  definiert durch

$$\begin{aligned} \Phi(t, y, h) &= \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3), \\ k_1 &= f(t, y), \quad k_2 = f\left(t + \frac{1}{3}h, y + \frac{1}{3}hk_1\right), \quad k_3 = f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}hk_2\right). \end{aligned}$$

- a) Geben Sie das Butcherschema für das durch  $\Phi$  beschriebene RK-Verfahren an.
- b) Das durch  $\Phi$  beschriebene RK-Verfahren ist ein Verfahren der Ordnung  $p = 3$ . Zeigen Sie, daß es mindestens Ordnung  $p = 2$  hat. Was müßte man zeigen, um auch noch Ordnung  $p = 3$  zu zeigen? *Hinweis:* Für den Zweck dieser Übung reicht es zu zeigen, daß  $|\tau(t_0, y_0, h)| \leq C(t_0, y_0)h^{p+1}$  für hinreichend kleine  $h$  und eine Konstante  $C(t_0, y_0)$ , die noch von  $(t_0, y_0)$  und  $f$  abhängen darf.

**3.7. a)** Für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung  $p+1 \in \mathbb{N}$  und jedes Polynom  $q \in \mathcal{P}_p$  sowie festes  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $\int_t^{t+h} q(x) dx = h\Phi(t, q(t), h)$ , d.h. das Runge-Kutta-Verfahren induziert eine Quadraturformel vom Exaktheitsgrad  $p$ .

**b)** Welche Quadraturformel wird durch das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung induziert? Welche Quadraturformel wird durch das modifizierte Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun, welche durch die folgenden Butcherschemata beschrieben werden:

$$\begin{array}{c} \text{modifizierter Euler:} \\ \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Heun:} \\ \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$