# Serie 9

Abgabe: bis **Mo, 26.5.08**, 12 Uhr bei Frau Kovalj

**9.1.** (**Programmieraufgabe 9.1**) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[y, errs] = \texttt{simple\_shooting}(n, s)$$

welches das Randwertproblem

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \qquad y(0) = 4, \qquad y(1) = 1$$

mit dem einfachen Schießverfahren löst. Hierbei soll $n$ die Anzahl Newtonschritte sein, und der Rückgabewert $y$ soll der Funktionswert bei $t = 1/2$ sein. Der Parameter $s$ ist der Startwert für das Newtonverfahren (d.h. eine erste Approximation an $y'(0)$). Der Vektor `errs` hat die Länge $n$ und enthält die Fehler des Newtonverfahren. Genauer: $\texttt{errs}(i) = |y(1) - y_N^{(i)}| = |1 - y_N^{(i)}|$, wobei $y_N^{(i)}$ die Approximation an $y(1)$ ist, die im $i$-ten Newtonschritt erzielt wird. Verwenden Sie als Anfangswertproblemlöser die MATLAB-Routine `ode45`. Schreiben Sie wie in der Vorlesung die ODE zweiter Ordnung als ein System erster Ordnung.

**9.2.** Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Betrachten Sie die ODE

$$y' = A(t)y,$$

**a)** Zeigen Sie: es gibt $n$ Funktionen $y_1, \ldots, y_n$, die Lösungen der ODE sind und linear unabhängig sind.

**b)** Zeigen Sie: Seien $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängige Lösungen der ODE. Dann ist die matrixwertige Funktion $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ invertierbar.

**c)** Zeigen Sie, daß für $g \in C(\mathbb{R})$ jede Lösung $y$ von $y' - A(t)y = g$ die Form $y(t) = Y(t)c + Y(t)\int_a^t Y^{-1}(\tau)g(\tau)\,d\tau$ für beliebig gewähltes $a \in \mathbb{R}$ und geeignetes $c \in \mathbb{R}^n$ hat.

**9.3.** (**schriftlich**) (1D Maximumprinzip und Stabilität) Betrachten Sie den Differentialoperator

$$Lu := -(a(x)u')' + b(x)u',$$

wobei $a$, $b \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sei $\Omega = (0, 1)$, und sei $a \geq a_0 > 0$. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für jedes $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt:

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \max\{|u(0)|, |u(1)|\} + C\|Lu\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

**9.4.** Betrachten Sie für glatte Koeffizienten $a$, $b$, $c$ den Differentialoperator

$$Lu = -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u. \tag{1}$$

Auf $\Omega$ sei ein Gitter definiert mit Knoten $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$ für $h = 1/N$. Definieren Sie für Gitterfunktionen $u_h = (u_i)_{i=0}^N$ die Operatoren $D_h^+$, $D_h^-$ durch

$$(D_h^+ u)_i := \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \qquad (D_h^- u)_i := \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

und die "symmetrische" Diskretisierung $L_h$ durch

$$(L_h u_h)_i = a(x_i)(D_h^- D_h^+ u_h)_i + b(x_i)\frac{1}{2}\left((D_h^+ u_h)_i + (D_h^- u_h)_i\right) + c(x_i)u_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

**a)** Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung Konsistenzordnung 2 hat. Genauer: Für $u \in C^4(\overline{\Omega})$ (und, wie in der VO $u^h := [u]_h$ definiert durch $(u^h)_i = u(x_i)$ für $i = 0, \dots, N$) gilt

$$\max_{i=1,\dots,N-1} |(L_h u^h)_i - (Lu)(x_i)| \leq Ch^2. \tag{2}$$

**b)** Wie sieht die Abschätzung in (2) aus, wenn lediglich $u \in C^3(\overline{\Omega})$?

**9.5.** Betrachten Sie in Aufg. 4 den Fall $c \equiv 0$.

**a)** Zeigen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*: Sei $h$ so klein, daß

$$a(x_i) \pm \frac{1}{2} hb(x_i) > 0 \qquad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \tag{3}$$

Dann gilt für alle Gitterfunktionen $u_h$:

$$(L_h u_h)_i \leq 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, N-1\} \qquad \Longrightarrow \qquad \max_{i=0,\dots,N} u_i \leq \max\{u_0, u_N\}.$$

**b)** Zeigen Sie die Existenz einer Gitterfunktion $\varphi_h$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &\varphi_h \geq 0 \\ &L_h \varphi_h \leq -1 \\ &\|\varphi_h\|_\infty \leq C \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ unabhängig von } h. \end{aligned}$$

*Hinweis:* betrachten Sie die Funktion $e^{\lambda x}$ für geeignetes $\lambda > 0$.

**9.6.** (Fortsetzung von Aufg. 5)

**a)** Zeigen Sie, unter der Voraussetzung (3) daß für ein $C > 0$ unabhängig von $h$ für alle Gitterfunktionen $u^h$ gilt:

$$\|u^h\|_\infty \leq \max\{|u_0^h|, |u_N^h|\} + C\|L_h u^h\|_\infty$$

Schließen Sie, daß für jeden Vektor $f \in \mathbb{R}^{N-1}$ und alle $u_{links}$, $u_{rechts} \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem: finde $(u^h)_{i=0}^N$, so daß

$$(L_h u^h)_i = f_i, \qquad i = 1, \dots, N-1, \qquad u_0^h = u_{links}, \qquad u_N^h = u_{rechts}$$

eine eindeutige Lösung hat und zudem

$$\|u^h\|_\infty \leq C \max\{|u_{links}|, |u_{rechts}|, \|f\|_\infty\}$$

gilt für ein $C > 0$ unabhängig von $h$.

**b)** Betrachten Sie das Randwertproblem: finde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so daß

$$Lu = f \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

für ein glattes $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, daß für die Diskretisierung aus Aufg. 4 die Fehlerabschätzung

$$\max_{i=0,\dots,N} |u(x_i) - u_i^h| \leq Ch^2$$

gilt. Welche Konvergenz liefern Ihre Abschätzungen, wenn $f \in C^1(\overline{\Omega})$?