Serie 10

Abgabe: bis Fr., 30.5.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

10.1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ist, wobei A_{11} und A_{22} nichttriviale quadratische Matrizen sind. A heißt *irreduzibel*, falls A nicht reduzibel ist. A hat die *Ketteneigenschaft*, falls, es zu jedem Paar $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ eine Folge $i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j$ gibt, so daß

$$A_{i_0,i_1},\ A_{i_1,i_2},\dots,A_{i_{\ell-1},i_\ell} \neq 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie: A irreduzibel $\iff$ A hat die Ketteneigenschaft. *Hinweis:* zeigen Sie A reduzibel $\iff$ A hat nicht die Ketteneigenschaft. Betrachten Sie für geeignete i die Menge $\mathcal{E}(i) := \{j \,|\, \exists \text{Kette } i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j \text{ mit } (1)\}$ der von i aus "erreichbaren" Indizes.

10.2. (**schriftlich**) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definieren Sie die (offenen) *Gerschgorinkreise*

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| < r_i\}, \qquad r_i := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

a) Zeigen Sie: Das Spektrum $\sigma(A)$ ist im Abschluß der Vereinigung der Gerschgorinkreise enthalten:

$$\sigma(A) \subset \cup_{i=1}^n \operatorname{clo}(K_i); \qquad \operatorname{clo}(K_i) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| \le r_i\}.$$

b) Zeigen Sie: falls A die Ketteneigenschaft hat (oder: A ist irreduzibel—siehe Aufg. 1), dann ist

$$\sigma(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n K_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^n \partial K_i\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $\lambda \in \sigma(A) \setminus \cup_{i=1}^n K_i$ und zeigen Sie, daß dann $\lambda \in \cap_{i=1}^n \partial K_i$. Hierzu sei oBdA ein zu λ gehöriger EV ξ zu $\|\xi\|_\infty = 1$ normiert. Dann gilt für jeden Index m mit $|\xi_m| = 1$, daß $\lambda \in \partial K_m$. Überlegen Sie sich, daß dann auch $|\xi_{m'}| = 1$ gilt für jeden Index m' mit $|A_{m,m'}| \neq 0$. Nutzen Sie dann die Ketteneigenschaft.

10.3. **a)** Zeigen Sie: für strikt diagonal dominante Matrizen A mit Diagonale D gilt für den Spektralradius von $I - D^{-1}A$, daß $\rho(I - D^{-1}A) < 1$.

b) A heißt irreduzibel diagonal dominant, wenn A irreduzibel ist und

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| \le |A_{ii}| \qquad \forall i$$

und eine strikte Ungleichung für mindestens einen Index i gilt. Zeigen Sie: Es gilt $\rho(I - D^{-1}A) < 1$. *Hinweis:* verwenden Sie Aufg. 2. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß D^{-1} existiert (dies könnte man aus der Irreduzibilität von A folgern).

10.4. (**Programmieraufgabe 10.4**) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)^2$ das Problem

$$Lu := -\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2}$$

Das regelmäßige Gitter $\overline{\Omega}_h$ wird durch die Knoten $x_{ij} := (ih, jh)$, $i, j = 0, \dots, n+1$ mit $h = 1/(n+1)$ beschrieben. Der 5-Punkt-Stern und der 9-Punkt-Stern sind zwei Diskretisierungen von $-\Delta$, die Approximationen an $(-\Delta u)(x_{ij})$ für die inneren Knoten (d.h. $1 \le i,j \le n$) darstellen[1]:

$$(L_h^5 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{h^2}\left(4u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i-1,j} - u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j-1}\right),$$

$$(L_h^9 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{6h^2}\left(20u^h_{i,j} - 4u^h_{i+1,j} - 4u^h_{i-1,j} - 4u^h_{i,j+1} - 4u^h_{i,j-1} - u^h_{i-1,j-1} - u^h_{i-1,j+1} - u^h_{i+1,j-1} - u^h_{i+1,j+1}\right).$$

[1] der 5-Punkt-Stern ist der in VO diskutierte

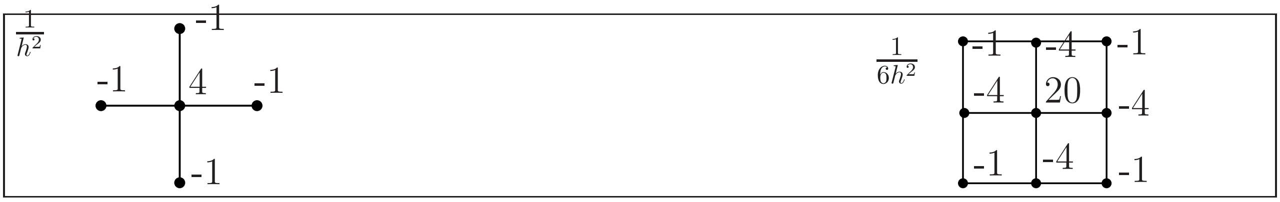

Abbildung 1: 5-Punkt (links) und 9-Punkt-Stern (rechts)

Diese Diskretisierungen werden kompakt wie in Fig. 1 dargestellt notiert. Als Gleichungssystem für die Approximationen u^h_{ij} in den inneren Knoten x_{ij} betrachten Sie 3 Fälle:

$$
\begin{aligned}
(L_h^5 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \le i,j \le n,\\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \le i,j \le n,\\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{12}\left[8f(x_{ij}) + f(x_{i+1,j}) + f(x_{i-1,j}) + f(x_{i,j-1}) + f(x_{i,j+1})\right], \qquad 1 \le i,j \le n.
\end{aligned}
$$

Schreiben Sie 2 Matlabprogramme mit den Signaturen

$$A9 = \texttt{nine\_point\_stencil}(n) \qquad\qquad A5 = \texttt{five\_point\_stencil}(n),$$

welche die Matrizen $A9$ und $A5 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $N = n^2$ zurückgeben, die zu den Diskretisierungen L_h^5 und L_h^9 gehören. Verwenden `sparse`-Matrizen, d.h. legen Sie $A9$ und $A5$ mit `spalloc(N,N,9*N)` bzw. `spalloc(N,N,5*N)` an. Verwenden Sie für die Nummerierung der (inneren) Knoten die lexikographische Nummerierung, d.h. der Doppelindex (i,j) mit $1 \le i,j \le n$ hat die Nummer $\nu(i,j) = (i-1)n + j$. Sie dürfen annehmen, daß $n > 2$ ist.

Schreiben Sie weiters eine Routine mit der Signatur

$$[\texttt{u5}, \texttt{u9\_4}, \texttt{u9\_2}] = \texttt{poisson}(n, f)$$

wobei f ein *function handle* für eine Funktion $z = f(x,y)$ ist. Die Rückgabewerte sollten die Lösungsvektoren sein, die zu den 3 obigen Diskretisierungen gehören. Zum Testen Ihres Programms können Sie verwenden, daß die Funktion $u(x,y) = \sin(\pi x)\,\sin(\pi y)$ eine Lösung des obigen Randwertproblems mit $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ ist. Das Konvergenzverhalten ist $O(h^2)$ in den ersten beiden Fällen und $O(h^4)$ im letzten Fall.

10.5. Zeigen Sie, daß die Matrix $A9$ aus Aufg. 4 eine M-Matrix ist. Geben Sie eine explizite Abschätzung für $\|A9^{-1}\|_\infty$ an. *Hinweis:* Satz 6.10 ("M-Kriterium").

Sei u^h die Gitterfunktion, die durch Lösen von $L_h^9 u^h = B_h f^h$ entsteht, wobei $B_h f^h$ definiert ist als

$$(B_h f^h)(x_{ij}) = \frac{1}{12}\left(8f^h(x_{i,j}) + f^h(x_{i+1,j}) + f^h(x_{i-1,j}) + f^h(x_{i,j+1}) + f^h(x_{i,j-1})\right), \qquad 1 \le i,j \le n.$$

Zeigen Sie, daß $\|[u]_h - u^h\|_\infty \le Ch^4$, falls die gesuchte Lösung u hinreichend glatt ist. *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß man durch Taylorentwicklung nachrechnen kann, daß

$$\|L_h^9[u]_h - B_h([-\Delta u]_h)\|_\infty \le Ch^4 \max_{|\alpha|=6} \|D^\alpha u\|_{C([0,1]^2)} \qquad \forall u \in C^6([0,1]^2).$$

10.6. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *inversmonoton*, falls ($\le$ ist bei Vektoren komponentenweise zu verstehen)

$$Ax \le Ay \qquad \Longrightarrow \qquad x \le y.$$

Zeigen Sie: eine inversmonotone Matrix A ist invertierbar, und $A^{-1} \ge 0$ (elementweise).

10.7. Sei A eine L-Matrix (d.h. $A_{ij} \le 0$ für $i \ne j$ und $A_{ii} > 0$ für alle i). Es gilt die Äquivalenz: A ist eine M-Matrix $\Longleftrightarrow \rho(I - D^{-1}A) < 1$. Zeigen Sie von dieser Äquivalenz die Richtung $\Longleftarrow$. Schließen Sie mit Aufg. 3, daß irreduzibel diagonal dominante Matrizen M-Matrizen sind.

In Aufg. 5 wurde gezeigt, daß die Matrix A9 eine M-Matrix ist. Überlegen Sie sich einen alternativen Beweis, indem sich sich überlegen, daß A9 irreduzibel ist (d.h. die Ketteneigenschaft hat).