Serie 11

Abgabe: bis Fr., 6.6.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

11.1. (**schriftlich**) Betrachten Sie den allgemeinen 9-Punkt-Stern wie in Fig. 1 beschrieben zur Approximation von $-\Delta$. Der Konsistenzfehler $\tau(h)$ an der Stelle (x,y) ist dann definiert als

$$\begin{aligned}\tau(h,u) \quad := \quad & \Big| -(\Delta u)(x,y) + \\ & \frac{1}{h^2}\Big(c_{0,0}u(x,y) + c_{-1,0}u(x-h,y) + c_{1,0}u(x+h,y) + \\ & c_{-1,-1}u(x-h,y-h) + c_{0,-1}u(x,y-h) + c_{1,-1}u(x+h,y-h) + \\ & c_{-1,1}u(x-h,y+h) + c_{0,1}u(x,y+h) + c_{1,1}u(x+h,y+h)\Big)\Big|\end{aligned}$$

Die durch den Stern beschriebene Diskretisierung heißt *konsistent* von der Ordnung p (bei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), falls es für jedes $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine Konstante $C > 0$ und ein $h_0 > 0$ gibt, so daß für alle $0 < h \leq h_0$ gilt: $\tau(h,u) \leq Ch^p$.

a) Sei $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Der Stern hat Konsistenzordnung p genau dann wenn $\tau(h,\pi) = 0$ für alle $\pi \in \mathcal{P}_{p+1}$ und alle $h > 0$.

b) Zeigen Sie: es gibt keinen 9-Punkt-Stern, der Konsistenzordnung $p \geq 3$ hat. *Hinweis:* betrachten Sie die Polynome $\pi_1 : (x,y) \mapsto x^2$ und $\pi_2 : (x,y) \mapsto x^4$.

11.2. Sei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ ein beliebiges Gitter auf $\Omega = (0,1)$. Sei $h_i = x_{i+1} - x_i$ für $i = 0, \ldots, N-1$. Betrachten Sie die Diskretisierung von $-u'' = f$ auf $\Omega = (0,1)$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ durch

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0, \quad -\frac{2}{h_i + h_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

Zeigen Sie: Einsetzen der Bedingungen $u_0 = 0$ und $u_N = 0$ führt auf ein LGS $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ für die Unbekannten $u_1, \ldots, u_{N-1}$, wobei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ eine M-Matrix ist.

11.3. (**Programmieraufgabe 11.3**) Es soll

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{auf } \Omega = (0,1)^2, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

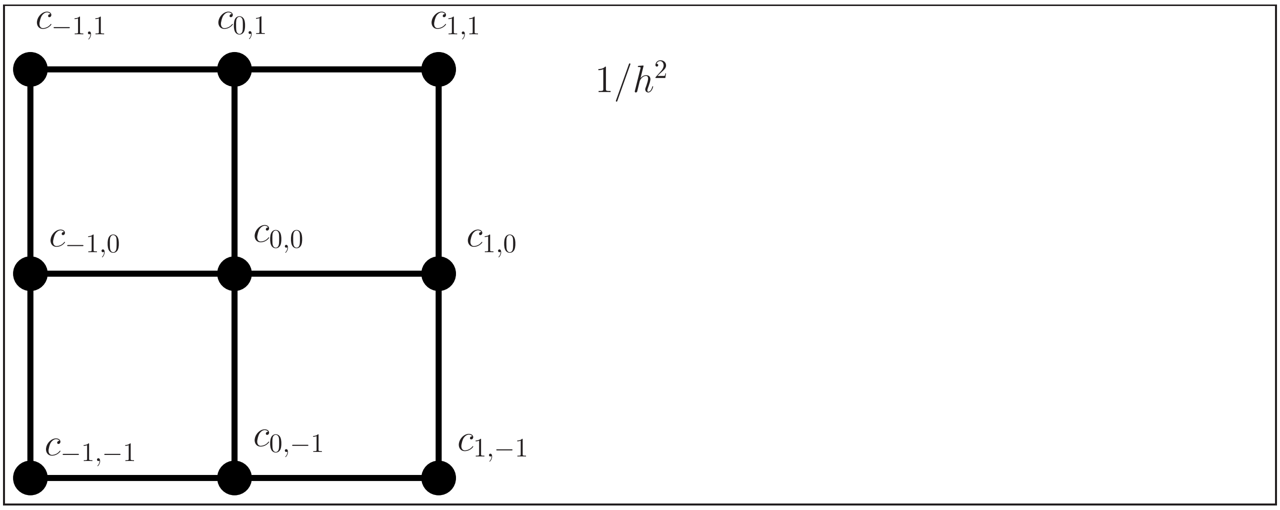

Abbildung 1: allg. 9-Punkt-Differenzenstern

mit einem Differenzenverfahren gelöst werden. Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[\texttt{sol}, \texttt{nr\_steps}] = \texttt{nonlinear\_solve}(\texttt{n}, \texttt{u0}, \texttt{tol}),$$

welches das Randwertproblem numerisch löst. Hier gibt wie in Programmieraufg. 10.4 der Parameter n die Anzahl Punkte pro Richtung an, `u0` ist der Startvektor für das Newtonverfahren, und `tol` ist die Toleranz für das Newtonverfahren. Verwenden Sie zur Diskretisierung von $-\Delta$ den 5-Punkt-Stern aus Programmieraufg. 10.4. Die Abbruchbedingung für das Newtonverfahren ist der Einfachheit halber so, daß die $\|\cdot\|_\infty$-Norm zweier aufeinanderfolgender Newtoniterierte $\leq$ `tol` ist. Der Rückgabevektor `sol` ist der Vektor der Knotenwerte, `nr_steps` gibt die Anzahl benötigter Newtonschritte an.
Zum Testen: für eine glatte Lösung erwarten Sie $O(h^2)$-Konvergenz.

Zusatzaufgabe: Wie kann ein Verfahren der Ordnung 4 erzeugt werden? *Hinweis:* Aufg. 10.5.

11.4. Sei $u \in C^1_{st.w.}(-1,1)$, d.h. es gebe eine Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = 1$ derart, daß $u|_{(x_i,x_{i+1})} \in C^1([x_i, x_{i+1}])$ für $i = 0, \ldots, M-1$.

a) Zeigen Sie: ist zusätzlich $u \in C([-1,1])$, dann hat u eine schwache Ableitung, welche auf jedem Teilintervall mit der klassischen (punktweise definierten) Ableitung übereinstimmt.

b) Hat die Heavisidefunktion H gegeben durch $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$ eine schwache Ableitung? Ist die Bedingung $u \in C(\overline{\Omega})$ in Teilaufg. a) notwendig?

11.5. Betrachten Sie auf $\Omega = (0,1)$ die Funktion $u(x) = x^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in L^2(\Omega)$? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in H^1(\Omega)$?

11.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

a) Zeigen Sie: $H^1_0(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$. *Hinweis:* Sie dürfen die Aussage der VO verwenden, daß $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H^1(\Omega)$. Überlegen Sie sich, daß für jedes $\overline{x} \in \Omega$ die Abbildung $H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u \mapsto u(\overline{x})$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, daß $H^1(\Omega)$ vollständig ist. *Hinweis:* Sie dürfen die Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ verwenden.

c) Zeigen Sie: für $u \in H^1_0(\Omega)$ gilt: $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{diam}(\Omega)\|u'\|_{L^2(\Omega)}$. Schließen Sie, daß es $C_\Omega > 0$ gibt, so daß

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega |u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

11.7. (Variationsungleichungen) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von Satz 7.1 der Vorlesung: Sei V Vektorraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform mit $a(u,u) \geq 0$ für alle $u \in V$. Sei $l : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform. Definiere

$$J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto J(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - l(u)$$

Sei $\mathcal{U} \subset V$ eine konvexe (nichtleere) Menge. Dann gilt: $u \in \mathcal{U}$ ist genau dann ein Minimierer von J, falls

$$a(u, v-u) \geq l(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}.$$