Serie 12

Abgabe: bis Fr., 13.6.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

12.1. (**schriftlich**) Analog zum 1D Fall gilt: eine (global) stetige Funktion, die stückweise glatt ist, ist in H^1. Zeigen Sie folgenden Spezialfall: Sei $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ und $\Omega_1 = (-1,0) \times (0,1)$ sowie $\Omega_2 = (0,1) \times (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\Omega_i} \in C^1(\overline{\Omega_i})$ für $i \in \{1,2\}$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$.

12.2. Sei $\Omega \subset (0,L)^2 \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2L|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Schließen Sie:

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1+4L^2}|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

12.3. (**Programmieraufgabe 12.3**) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[\texttt{A},\texttt{l}] = \texttt{FEM\_1D}(\texttt{x},\texttt{f})$$

welches die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und den Lastvektor $\mathbf{l}$ für das Problem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

bestimmt. Sie können annehmen, daß der Vektor $x = (x_0, \ldots, x_N)$ geordnet ist (d.h. $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$); es ist $\Omega = (x_0, x_N)$. f soll ein *function handle* auf eine Funktion sein. Die FEM-Diskretisierung soll mit den klassischen stückweise linearen Ansatzfunktionen realisiert werden. Approximieren Sie die Integrale auf dem Referenzelement, die bei der Bestimmung des Lastvektors auftreten, mit der Mittelpunktsregel. Verwenden Sie ein geeignetes *sparse* Format für die Matrix A. Sie dürfen voraussetzen, daß $\texttt{length}(x) \geq 3$.

12.4. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-u'' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Sei $c \geq 0$ und $c \in C(\overline{\Omega})$. Eine *schwache* Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ ist definiert als die Lösung der Aufgabe:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d.} \qquad a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $a(u,v) = \int_\Omega u'v' + c(x)uv$.

a) Zeigen Sie: ist $f \in C(\overline{\Omega})$ und erfüllt eine schwache Lösung die Regularitätsvoraussetzung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so ist u eine klassische Lösung.

b) Die klassische FEM für das RWP (1) führt wieder auf ein LGS der Form $\mathbf{Au} = \mathbf{l}$. Formulieren Sie den Algorithmus zum Aufstellen von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{l}$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{A}$ SPD ist.

c) Zeigen Sie, daß die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ symmetrisch positiv definit ist.

12.5. (Monotone Konvergenz der FEM in der Energie) Betrachten Sie $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$ auf $H_0^1(\Omega)$. Seien $V_N \subset V_{N'} \subset H_0^1(\Omega)$ zwei Unterräume. Es gelte für $u \in H_0^1(\Omega)$ und $u_N \in V_N$, $u_{N'} \in V_{N'}$:

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a(u_N,v) = l(v) \quad \forall v \in V_N, \qquad a(u_{N'},v) = l(v) \quad \forall v \in V_{N'}$$

a) Zeigen Sie:

$$a(u-u_{N'}, u-u_{N'}) = |u-u_{N'}|^2_{H^1(\Omega)} \le |u-u_N|^2_{H^1(\Omega)} = a(u-u_N, u-u_N).$$

b) Zeigen Sie:

$$a(u,u) - a(u_N, u_N) = a(u-u_N, u-u_N).$$

c) Sei $\{\varphi_i \,|\, i = 1, \ldots, N\}$ eine Basis von V_N und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ die Steifigkeitsmatrix bzw. der Lastvektor. Zeigen Sie: für die FEM-Approximation $u_N \in V_N$ gilt: $a(u_N, u_N) = \mathbf{u}^\top \mathbf{l}$.

12.6. In Aufg. 3 wurde der Lastvektor nicht exakt ausgewertet, sondern durch numerische Quadratur approximiert. Es soll nun gezeigt werden, daß dieser "Fehler" nur einen weiteren Fehler $O(h)$ erzeugt. Sei $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$ und sei für $f \in C^2(\overline{\Omega})$ die Linearform l definiert durch $l(v) = \int_\Omega fv$. Definiert man für ein Gitter $\mathcal{T}$ den Operator $I_0 : C(\overline{\Omega}) \to S^0(\mathcal{T}) := \{u \in L^2(\Omega) \,|\, u|_K = \text{konstant} \quad \forall K \in \mathcal{T}\}$ durch

$$(I_0 w)|_K := w(m_K), \qquad m_K = \text{Schwerpunkt von } K,$$

so erfüllen die "exakte" FEM Lösung $u_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ aus Aufg. 3 und die numerisch realisierte $\widetilde{u}_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ die Gleichungen

$$a(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in S^1_0(\mathcal{T}), \qquad a(\widetilde{u}_N, v) = \widetilde{l}(v) := \int_\Omega I_0(fv) \quad \forall v \in S^1_0(\mathcal{T}).$$

a) Zeigen Sie:

$$|u_N - \widetilde{u}_N|_{H^1(\Omega)} \le \sup_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \frac{|l(v) - \widetilde{l}(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}}.$$

b) Zeigen Sie: falls $h = \max_{K\in\mathcal{K}} h_K$ (mit $h_K = \operatorname{diam} K$), so ist

$$\sup_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \frac{|l(v) - \widetilde{l}(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}} \le Ch \sum_{j=1}^{2} \|f^{(j)}\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, daß für jedes $v \in S^1_0(\Omega)$ und $K \in \mathcal{T}$ gilt: $v|_K \in \mathcal{P}_1$.

12.7. (Aubin-Nitsche Trick) Sei wieder $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$. Sei $u_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ die FEM-Approximation. Definieren Sie den Fehler $e := u - u_N \in H^1_0(\Omega)$. Ziel ist zu zeigen:

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \le Ch\|e\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2}$$

d.h. der Fehler gemessen in L^2 ist eine h-Potenz besser als der Fehler gemessen in H^1.

a) Definieren Sie ψ als (klassische) Lösung von

$$-\psi'' = e \quad \text{auf } \Omega, \qquad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Dann gilt:

$$a(v,\psi) = \int_\Omega ev \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega), \qquad \inf_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \|\psi - v\|_{H^1(\Omega)} \le Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

b) Zeigen Sie die Abschätzung (2). *Hinweis:* Überlegen Sie sich, daß $\|e\|^2_{L^2(\Omega)} = a(e,\psi)$ gilt.