Serie 13

Abgabe: bis Fr., 20.6.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

13.1. Seien $\mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ beide SPD. Zeigen Sie: Es existieren Eigenpaare $(\mathbf{v}_i, \lambda_i) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, N$ des verallgemeinerten EWP

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{M}\mathbf{v}_i$$

mit der Eigenschaft

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbf{M}} = \delta_{ij}, \qquad \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbf{A}} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Insbesondere bilden die $\mathbf{v}_i$ damit eine Basis des $\mathbb{R}^N$. *Hinweis:* EWP $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

13.2. **a)** Sei $u \in C^1((0,T); H^1_0(\Omega))$. Zeigen Sie: $u \in C^1((0,T); L^2(\Omega))$.

b) Sei $u \in C^1((0,T); H^1_0(\Omega))$. Zeigen Sie: $g : t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ ist stetig differenzierbar und $g'(t) = 2\langle u'(t), u(t) \rangle_{L^2(\Omega)}$.

13.3. Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Vorab zur Begriffsbildung: Für den Hilbertraum $X = L^2(\Omega)$ oder $X = H^1_0(\Omega)$ kann eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in kanonischer Weise[1] als Funktionen $f : \mathbb{R} \to X$ betrachtet werden mittels der Interpration als $t \mapsto f(\cdot, t)$.

a) für welche $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $(x,t) \mapsto e^t x(1-x)$ in $C^k(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega))$?

b) für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $(x,t) \mapsto e^t x^\alpha (1-x)$ in $C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$?

c) Ist die Funktion $(x,t) \mapsto \frac{\sqrt{t}}{x+t}$ ein Element von $C([0,1]; L^2(\Omega))$?

13.4. (**Programmieraufgabe 13.4**) Erstellen Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[\mathtt{u}] = \mathtt{heat\_eqn\_1D\_implicit\_euler}(\mathtt{x}, \mathtt{k}, \mathtt{K}, \mathtt{u0}, \mathtt{f}),$$

das eine Approximation an die Lösung des Problems

$$u_t - u_{xx} = f, \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad u(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

erzeugt. Dabei soll das implizite Eulerverfahren in der Zeit und klassische FEM im Ort verwendet werden. Hier ist x ein (sortierter) Vektor von Knoten, der das Ortsgitter beschreibt (d.h. $\Omega = (\mathtt{min}(x), \mathtt{max}(x))$. k ist die Zeitschrittweite, K ist die Anzahl Zeitschritte die durchgeführt werden soll. $u0$ ist ein Vektor (der Länge $\mathtt{length}(x) - 2$) mit Knotenwerten für den Startwert. f ist ein *function handle* für eine Funktion $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$, die die rechte Seite beschreibt. Die Ausgabe soll ein Vektor der Länge $\mathtt{length}(x) - 2$ sein, der aus den Knotenwerten der Approximation zum Zeitpunkt Kk besteht. Testen Sie Ihr Programm mit der exakten Lösung $u(x,t) = e^{-t}x(1-x)$ zum Zeitpunkt $T = 1$ und $k = 0.1h$ (sie sollten $O(h)$ sehen, wenn Sie als Fehlermaß $\sqrt{h}\sqrt{\sum_i |u(x_i,T) - u_i^K|^2}$ nehmen; dieses Fehlermaß imitiert die $L^2(\Omega)$-Norm).

13.5. Sei $V_N \subset H^1_0(\Omega)$. Die Funktionen $\theta \in C^1([0,T]; V_N)$, $u \in C^1([0,T]; H^1_0(\Omega))$ und $u_N \in C^1([0,T]; V_N)$ mögen die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\langle \theta'(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(\theta(t), v) &= \langle r(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v \in V_N, \\
\langle u'(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) &= \langle f(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v \in H^1_0(\Omega) \\
\langle u_N', v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_N(t), v) &= \langle r(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v \in V_N
\end{aligned}$$

erfüllen, wobei $r \in C([0,T]; V_N)$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ und $a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v$.

[1] man verwendet das gleiche Symbol "f", obwohl strikt genommen zwei verschiedene Funktionen vorliegen

a) Zeigen Sie:

$$|\theta(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq |\theta(0)|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|r(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds.$$

Hinweis: verwenden Sie $v = \theta'$ als Testfunktion

b) Bezeichnet $R_N : H^1_0(\Omega) \to V_N$ den Ritzprojektor, der durch die Bedingung $a(R_N u, v) = a(u, v)$ für alle $v \in V_N$ gekennzeichnet ist, dann gilt

$$|u(t)-u_N(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq 2|u(t)-R_N u(t)|^2_{H^1(\Omega)}+2|u_N(0)-R_N u(0)|^2_{H^1(\Omega)}+2\int_0^t \|u'(s)-R_N u'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds.$$

13.6. (1D inverse Abschätzung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{T}$ ein Gitter auf Ω. Mit h_K, $K \in \mathcal{T}$, seien die Elementdurchmesser bezeichnet und $h_{min} = \min_{K\in\mathcal{T}} h_K$.

a) Sei $\widehat{K} := (-1, 1)$ das Referenzelement. Zeigen Sie: Es gibt ein $C > 0$, so daß

$$\|w\|_{H^1(\widehat{K})} \leq C\|w\|_{L^2(\widehat{K})} \qquad \forall w \in \mathcal{P}_1$$

b) Zeigen Sie:

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{-2}_{min}\|w\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall w \in S^1(\mathcal{T}).$$

Hinweis: Sei $F_K : \widehat{K} \to K$ die affine Elementabbildung. Überlegen Sie sich, in welcher Beziehung $\|\widehat{w}'\|_{L^2(\widehat{K})}$ und $\|w'\|_{L^2(K)}$ bzw. $\|\widehat{w}\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|w\|_{L^2(K)}$ zu einander stehen, falls $\widehat{w} := w \circ F_K$.