Serie 1

1.1. **a)** Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Die Funktion f erfülle eine *einseitige Lipschitzbedingung* mit Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\langle f(t,y) - f(t,z), y - z\rangle_2 \leq L\langle y - z, y - z\rangle_2 \qquad \forall (t,y),(t,z) \in G.$$

Zeigen Sie folgende Aussage über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $[t_0, T] \subset J$ und seien y, $z \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ Lösung der Differentialgleichung, d.h.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{und} \qquad z'(t) = f(t, z(t)) \qquad \forall t \in J.$$

Dann gilt für alle $t \in [t_0, T]$:

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq \|y(t_0) - z(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $m(t) = \|y(t) - z(t)\|_2^2$; gehen Sie vor wie im Beweis des Gronwall-Lemmas.

b) Schließen Sie, daß für Funktionen f, die eine einseitige Lipschitzbedingung erfüllen, die Fortsetzung nach rechts eindeutig ist.

1.2. Betrachten Sie das *autonome* Anfangswertprobleme

$$y' = f(t, y) := Ay + g(y), \qquad y(0) = y_0, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix ist, deren Eigenwerte λ_i, $i = 1, \ldots, n$ die Bedingung $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\rho < 0$, $i = 1, \ldots, n$ erfüllen. Die Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erfüllt für ein $C_g > 0$ die Abschätzung $\|g(y)\|_2 \leq C_g \|y\|_2^2$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so daß für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\|_2 \leq \varepsilon$ jede auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ von (1) die asymptotische Beziehung $\lim_{t\to\infty} \|y(t)\|_2 = 0$ erfüllt. *Hinweis:* Transformieren Sie das Problem, so daß Sie Aufg. 1 mit geeigneter Lösung z von $z' = f(t, z)$ verwenden können.

b) In Teilaufg. a) wurden nur Lösungen betrachtet, die auf ganz $\mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie: Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ folgt (z.B. mit Hilfe Aussage über die Mindestlänge des Existenzintervalls des Satzes von Picard-Lindelöf), daß für jedes (offene) Intervall $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a < 0$ gilt: Jede Lösung $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ von (1) läßt sich zu einer Lösung von (1) auf (a, ∞) (eindeutig) fortsetzen.

c) (**Zusatz**) Gilt die Aussage aus Teilaufg. b), daß sich Lösungen "bis ∞" fortsetzen lassen, auch für "große" ε oder muß mit "blow up" gerechnet werden?

1.3. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t), \qquad y(0) = g(0) + \delta, \tag{2}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ beschränkt und $\delta \in \mathbb{R}$ sei.

a) Lösen Sie (2).

b) Diskutieren Sie die Wirkung der Störung δ für die drei Fälle $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$.

c) Visualisieren Sie die Lösung für $\delta = 0$ und $\delta = 10^{-2}$ mit $g(t) = \arctan t$ bzw. $g(t) = e^{-t^2}$.

1.4. Gegeben sei auf $G = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(t, y) = \sqrt{|1 - y^2|}.$$

Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung(en) des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = 0.$$