

## Serie 2

Abgabe: bis Fr., 13.3.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

- 2.1. (schriftlich)** Für hinreichend glatte Funktionen  $f$  bezeichnet  $t \mapsto y_{t_0, y_0}(t)$  die (eindeutige) Lösung des AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Ziel der Aufgabe ist, die stetige Differenzierbarkeit der Funktion  $y_0 \mapsto y_{t_0, y_0}(t)$  zu zeigen. Genauer: die Funktion  $R(t) := \frac{\partial}{\partial y_0} y_{t_0, y_0}(t)$  ist die Lösung des *linearen* AWP

$$R'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0, y_0}(t)) R(t), \quad R(t_0) = 1. \quad (2)$$

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ . Sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $t_0 \in J$  und  $y_{t_0, y_0} \in C^1(J, \mathbb{R})$  die Lösung des AWP (1). Zeigen Sie mit Satz 1.5 der Vorlesung, daß für  $\Delta_h(t) = \frac{1}{h} (y_{t_0, y_0+h}(t) - y_{t_0, y_0}(t))$  gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h(t) = R(t), \quad t \in J.$$

*Hinweis:* Setzen Sie  $\delta(t) := \Delta_h(t) - R(t)$  und versuchen Sie, für  $\delta$  eine Differentialgleichung der Form  $\delta'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0, y_0}(t)) \delta(t) + z(t, h)$  zu finden. Kontrollieren Sie  $z$  mittels Satz 1.5 der VO.

- 2.2.** Zeigen Sie das *diskrete Gronwall-Lemma*: Seien  $(e_i)_{i=0}^N, (\eta_i)_{i=0}^N, (\delta_i)_{i=0}^N$  drei Folgen mit nicht-negativen Elementen, die

$$e_{i+1} \leq (1 + \delta_i) e_i + \eta_i, \quad i = 0, \dots, N-1$$

erfüllen. Dann ist

$$|e_i| \leq \left( e_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_j \right) e^{\sum_{j=0}^{i-1} \delta_j} \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{Konvention: leere Summe} = 0)$$

- 2.3.** Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y) \text{ in } [a, b], \quad y(a) = y_0$$

wird ein explizites Einschrittverfahren verwendet gemäß der Rekursion

$$y_{\nu+1} = y_{\nu} + h_{\nu} \Phi(t_{\nu}, y_{\nu}, h_{\nu}) \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Weiters sei  $\tilde{y}_{\nu}$  eine Folge, die dadurch entsteht, daß in jedem Schritt eine Störung gemacht wird (z.B. durch Rundungsfehler):

$$\tilde{y}_{\nu+1} = \tilde{y}_{\nu} + h_{\nu} \Phi(t_{\nu}, \tilde{y}_{\nu}, h_{\nu}) + \varepsilon_{\nu}.$$

Nehmen Sie, daß die Störungen  $\varepsilon_{\nu}$  die Abschätzung  $|\varepsilon_{\nu}| \leq \varepsilon$  für alle  $\nu$  erfüllen. Zeigen Sie: Ist die Inkrementfunktion  $\Phi(t, y, h)$  Lipschitz-stetig in  $y$  mit Lipschitzkonstante  $L > 0$ , so gilt

$$|y_{\nu} - \tilde{y}_{\nu}| \leq (|y_0 - \tilde{y}_0| + \nu \varepsilon) \exp(L|t_{\nu} - t_0|), \quad \nu = 0, \dots, N.$$

#### 2.4. (Programmieraufgabe 2.4)

Das explizite Eulerverfahren ist durch  $y_\nu = y_{\nu-1} + hf(t_{\nu-1}, y_{\nu-1})$  definiert. Implementieren Sie für den Spezialfall  $f(t, y) = M(t)y + g(t)$  das explizite Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite  $h = (b - a)/N$  zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y) \text{ in } [a, b], \quad y(a) = y_0.$$

Dabei kann die gesuchte Lösung  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektorwertig sein,  $M(t)$  ist in diesem Fall eine  $n \times n$  Matrix. Der MATLAB-Funktion

$$[t, y] = \text{euler}(a, b, N, y_0, M, g)$$

soll neben den Daten  $a$ ,  $b$ ,  $N$  und  $y_0$  auch die Function-Handles der Funktionen  $Mt=M(t)$  und  $gt=g(t)$  übergeben werden. Die übergebenen Funktionen können dann beispielsweise mit  $Mt=\text{feval}(M, t)$  aus der Funktion `euler` heraus aufgerufen werden. Als Rückgabeparameter liefere die Funktion `euler` den Stützstellenvektor  $t \in \mathbb{R}^{N+1}$  und die Matrix der dazugehörigen Funktionswerte  $y \in \mathbb{R}^{n \times (N+1)}$ , d.h. die  $\nu + 1$ -te Spalte von  $y$  entspricht der Approximation  $y_\nu$  an der Stelle  $t_\nu$ .

#### 2.5. (Programmieraufgabe 2.5)

Das implizite Eulerverfahren ist durch  $y_\nu = y_{\nu-1} + hf(t_\nu, y_\nu)$  definiert. Schreiben Sie unter denselben Voraussetzungen wie in der Programmieraufgabe 2.4 eine MATLAB-Funktion

$$[t, y] = \text{ieuler}(a, b, N, y_0, M, g)$$

die das implizite Eulerverfahren realisiert. Vergleichen Sie die Fehler  $|y(1) - y_N(1)|$  für explizites und implizites Eulerverfahren im (doppelt logarithmischen) Plot über  $N = 2^i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ . Als Beispiel nehmen Sie das Modellproblem

$$y' = \lambda y \text{ auf } [0, 1], \quad y(0) = 1$$

mit exakter Lösung  $y(t) = \exp(\lambda t)$  für verschiedene konstante Werte von  $\lambda \in \{\pm 1, \pm 10\}$