Serie 3

Abgabe: bis Fr., 20.3.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

3.1. (**schriftlich**) Ein allgemeines *implizites* Einschrittverfahren ist durch die Rekursionsvorschrift

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, y_{i+1}, h_i) \tag{1}$$

gegeben. Ziel der Aufgabe ist zu sehen, daß die Konvergenztheorie für explizite Einschrittverfahren aus der Vorlesung auch für implizite Einschrittverfahren übertragen werden kann.

a) Sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^4)$ und für ein $\underline{h} > 0$ gelte

$$\sup_{t,y,z \in \mathbb{R}} \sup_{0<h<\underline{h}} |\Phi(t,y,z,h)| + |\partial_y \Phi(t,y,z,h)| + |\partial_z \Phi(t,y,z,h)| =: M < \infty.$$

Zeigen Sie: es existiert $\overline{h} > 0$ so daß für jedes $t \in \mathbb{R}$, $h \in (0, \overline{h})$ und $y \in \mathbb{R}$ die Aufgabe:

$$\text{Finde } z \in \mathbb{R} \text{ s.d.} \quad z = y + h\Phi(t, y, z, h) \tag{2}$$

eine eindeutige Lösung hat.

b) Sei $y_{ex} \in C^1(J)$ für ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Definieren Sie den *Abschneidefehler* $(t, h) \mapsto r(t, h)$ durch

$$y_{ex}(t + h) = y_{ex}(t) + h\Phi(t, y_{ex}(t), y_{ex}(t + h), h) + r(t, h), \tag{3}$$

wobei $t \in J$ und $h > 0$ natürlich die Bedingung $t + h \in J$ erfüllen müssen. Es gelte

$$|r(t, h)| \leq C_{absch} h^{p+1} \qquad \forall h \in (0, \overline{h}).$$

Sei $[t_0, T] \subset J$ fixiert. Zeigen Sie: für jedes $h \in (0, \overline{h})$ und jedes Gitter $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = T\}$ mit $\max_i h_i \leq h$ ist die durch (1) definierte Folge wohldefiniert, und es gibt Konstanten C_1, $L > 0$, welche nicht von h abhängen, so daß

$$\max_{i=0,\ldots,N} |y_{ex}(t_i) - y_i| \leq C(T - t_0)e^{L(T-t_0)} h^p.$$

Hinweis: immitieren Sie den Beweis von Satz 2.10 der Vorlesung.

c) Seien $J, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $\underline{h} > 0$, $[t_0, T] \subset J$. Sei $\Phi \in C^1(J \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times [0, \underline{h}))$. Sei $y_{ex} \in C^1(J)$ mit $\operatorname{graph}(y_{ex}) = \{(t, y_{ex}(t)) \,|\, t \in J\} \subset J \times \mathcal{Y}$. Zeigen Sie, daß auch für solche Inkrementfunktionen die Konvergenzaussage aus Teilaufg. b) gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $\widetilde{\Phi} = \chi\Phi$, wobei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ eine geeignete Abschneidefunktion ist. Sie dürfen (das aus der Analysis bekannte Resultat) verwenden, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi|_{[-1,1]} \equiv 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ gibt.

3.2. Sei $\Delta = \{t_i \,|\, i = 0, \ldots, N\}$ ein Gitter auf $[t_0, T]$ und seien y_i, $i = 0, \ldots, N$ die Approximationen an die Lösung $y(t_i)$, wobei y das AWP $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ löst. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $h = \max_i h_i$. Die Approximationen y_i sollen zu einer Funktion $\tilde{y}$ zwischen den Knoten t_i ergänzt werden.

a) Die Funktion $\tilde{y}$ wird als der stückweise lineare Interpolant der Approximationen gewählt, d.h. $\tilde{y} \in S^1(\Delta)$ mit den Bedingungen $\tilde{y}(t_i) = y_i$. Zeigen Sie: falls $\max_i |y(t_i) - y_i| \leq Ch$, dann gilt für ein geeignetes $C' > 0$

$$\|\tilde{y} - y\|_{C([t_0,T])} \leq C'h.$$

b) Bessere Approximationen als in Teilaufg. a) ergeben sich durch Interpolation mit Polynomen höherer Ordnung. Definieren Sie hierzu auf (t_i, t_{i+1}) die Funktion $\tilde{y}|_{(t_i,t_{i+1})}$ durch Hermiteinterpolation als das Polynom 3. Grades, für welches gilt

$$\tilde{y}(t_i) = y_i, \quad \tilde{y}(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad \tilde{y}'(t_i) = f(t_i, y_i), \quad \tilde{y}'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y_{i+1}),$$

Wenn Sie ein Verfahren der Ordnung p verwenden, d.h. $\max_{i=0,\ldots,N} |y(t_i) - y_i| \leq Ch^p$, welche Genauigkeit erwarten Sie dann für $\max_{t \in [t_0,t_N]} |y(t) - \tilde{y}(t)|$?

3.3. (**Programmieraufgabe 3.3**) Man implementiere das explizite Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 4 in einer MATLAB-Funktion

$$\texttt{y} = \texttt{rk4}(\texttt{f}, \texttt{y0}, \texttt{t})$$

der als Eingabeparameter das Funktionshandle der rechten Seite `fty=f(t,y)`, der Anfangswert y_0 sowie der Vektor der Stützstellen $t = (t_0, t_1, ..., t_N)$ übergeben werde. Dabei darf die unbekannte Lösung auch vektorwertig sein, dh. $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein Spaltenvektor.

3.4. (**Programmieraufgabe 3.4**) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$[p1, p2] = \texttt{ordnungrk4}(nmax)$$

welches die Konvergenzordnung des RK4-Verfahrens auf zwei Arten für das Modellproblem $y' = y$ und $t_0 = 0, y_0 = 1, T = 1$ schätzt. Das RK4-Verfahren soll die Schrittweiten $h = 2^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$ verwenden. Die Anzahl Schritte N ist durch T/h gegeben.

1. 1. Art (Bestimmung von p1): Fitten Sie tatsächlichen Fehler $\varepsilon(h) := |y(T) - y_N|$ an ein Gesetz der Form $\varepsilon(h) = Ch^p$, wobei Sie die Daten für $h = 2^{-n}$, $n \in \{n_{max} - 2, n_{max} - 1, n_{max}\}$ verwenden. *Hinweise:* Das Gesetz ist äquivalent zu $\log \varepsilon(h) = \log C + p \log h$; `help polyfit`.
2. 2. Art (Bestimmung von p2): Betrachten Sie den geschätzten Fehler $\widetilde{\varepsilon}(h) := |y_{2N} - y_N|$, der sich aus den Approximationen zu den Schrittweiten h und $h/2$ ergibt. Fitten Sie wie bei der 1. Art die geschätzten Fehler $\widetilde{\varepsilon}(h)$ an ein Gesetz der Form $\widetilde{\varepsilon}(h) = Ch^p$ mittels der Werte $h = 2^{-n}$, $n \in \{n_{max} - 3, n_{max} - 2, n_{max} - 1\}$.

3.5. Gegeben sei das AWP

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit exakter Lösung $y_1(t) = 2e^{-t} + \sin t$, $y_2(t) = 2e^{-t} + \cos t$. Es soll der Fehler $e(h) := \|y(T) - y_N\|_2$ für $T = 1$ als Funktion der Schrittweite h (verwenden Sie uniforme Gitter) doppelt logarithmisch darstellt werden. Vergleichen Sie das RK4-Verfahren mit dem expliziten Eulerverfahren für die Fälle $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 20$ bei Verwendung von *doppelt genauer* Arithmetik und *einfacher Genauigkeit*. *Hinweis:* `help single` in MATLAB. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

3.6. Sei die Inkrementfunktion Φ definiert durch

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3),$$
$$k_1 = f(t, y), \qquad k_2 = f(t + \tfrac{1}{3}h, y + \tfrac{1}{3}hk_1), \qquad k_3 = f(t + \tfrac{2}{3}h, y + \tfrac{2}{3}hk_2).$$

a) Geben Sie das Butcherschema für das durch Φ beschriebene RK-Verfahren an.

b) Das durch Φ beschriebene RK-Verfahren ist ein Verfahren der Ordnung $p = 3$. Zeigen Sie, daß es mindestens Ordnung $p = 2$ hat. Was müßte man zeigen, um auch noch Ordnung $p = 3$ zu zeigen? *Hinweis:* Für den Zweck dieser Übung reicht es zu zeigen, daß $|\tau(t_0, y_0, h)| \leq C(t_0, y_0)h^{p+1}$ für hinreichend kleine h und eine Konstante $C(t_0, y_0)$, die noch von (t_0, y_0) und f abhängen darf.

3.7. **a)** Für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p + 1 \in \mathbb{N}$ und jedes Polynom $q \in \mathcal{P}_p$ sowie festes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\int_t^{t+h} q(x)\,dx = h\Phi(t, q(t), h)$, d.h. das Runge-Kutta-Verfahren induziert eine Quadraturformel vom Exaktheitsgrad p.

b) Welche Quadraturformel wird durch das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung induziert? Welche Quadraturformel wird durch das modifizierte Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun, welche durch die folgenden Butcherschemata beschrieben werden:

$$\text{modifizierter Euler: } \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{Heun: } \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$