Serie 4

Abgabe: bis Fr., 27.3.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

4.1. (**schriftlich**) Im Konvergenzsatz Satz 2.10 wurde die Lipschitzstetigkeit der Inkrementfunktion Φ benötigt. Zeigen Sie, daß diese Voraussetzung für explizite s-stufige RK-Verfahren erfüllt ist. Nehmen Sie hierzu an, daß $f \in C(\mathbb{R}^2)$ eine (globale) Lipschitzbedingung im 2. Argument mit Lipschitzkonstante $L > 0$ erfüllt. Zeigen Sie nun, daß dann die Inkrementfunktion Φ eine Lipschitzbedingung mit Konstante L_Φ erfüllt, wobei

$$L_\Phi \leq L \sum_{i=1}^{s} |b_i|(1+\eta)^i, \qquad \text{wobei} \qquad \eta = Lh \max_{i=1,\dots,s} \sum_{j=0}^{i-1} |a_{ij}|.$$

I. W. vererbt sich also die Lipschitzkonstante von f auf die Inkrementfunktion Φ. *Hinweis:* Betrachten Sie die Differenz $k_i - \widehat{k}_i$, wobei k_i und $\widehat{k}_i$ die Stufen für Daten y, $\widehat{y}$ bezeichnen.

4.2. (**Programmieraufgabe 4.2**) Implementieren Sie das ein Einschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung basierend auf dem klassischen RK4-Verfahren. Verwenden Sie die $(h, h/2)$-Strategie wie in Alg. 2.23 der Vorlesung. Verwenden Sie den Sicherheitsfaktor $\rho = 0.8$, Vergrößerungsparameter $\eta = 2$ und $h_{min} = \texttt{tol}$ sowie als Startschrittweite $h = \texttt{tol}^{1/5}$. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
[t,y,Fevals,rejects]=rk4adaptive(f,y0,a,b,tol)
```

der als Eingabeparameter das Functionhandle der rechten Seite `f = f(t,y)`, der Anfangswert y_0, die Intervallgrenzen a und b des Zeitintervalls $[a, b]$ sowie die Toleranz $\texttt{TOL} > 0$ übergeben werden. Dabei darf die unbekannte Lösung vektorwertig sein, d.h. $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein Spaltenvektor. Die Rückgabeparameter t und y sind Vektoren (bzw., wenn $y_0 \in \mathbb{R}^n$, dann ist y eine Matrix mit n Zeilen), die die verwendeten Zeitpunkte und der Lösungswerte enthalten. Die weiteren Rückgabewerte $Fevals$ und $rejects$ geben die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen und abgelehnter Schritte an. Zum Testen Ihres Programms können Sie die die Van der Pol Gleichung

$$y'' = \mu((1 - y^2)y' - y)$$

mit Parameter $\mu = 20$ und Startwert $(y(0), y'(0)) = (2, -2/3)$ auf dem Intervall $[0, 4]$ betrachten. Einen Lösungsplot finden Sie auf der homepage der VO. (Sinnvolle Werte für `tol`: 10^{-3} bis 10^{-5}).

Hinweis: Transformieren Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung.

4.3. (**Programmieraufgabe 4.3**)

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, wie der Schrittweitenvorschlag zu wählen ist, wenn der adaptive Algorithmus auf dem *error per unit step*-Kriterium basiert. Geben Sie die Schrittweitenvorschläge an, die entstehen, wenn die Schrittweiten nach dem *error per step* Kriterium gewählt werden sollen. Betrachten Sie den Fall eines Verfahrens der Ordnung p.

b) Welche Genauigkeit zum Endzeitpunkt T erwarten Sie, wenn Sie ein auf dem *error per step*-Kriterium basierenden Algorithmus mit Toleranz `tol` verwenden?

c) Modifizieren Sie Ihren Löser `rk4adaptive` aus Aufg. 4.2, so daß er mit dem *error per step*-Kriterium arbeitet. Die Signatur dieses Lösers ist

```
[t,y,Fevals,rejects]=rk4adaptiveEpS(f,y0,a,b,tol)
```

d) Vergleichen Sie `rk4adaptive` und `rk4adaptiveEpS` für die Auswertung von $y(1)$, wobei die Lösung $y(t) = 1/(1 + 100t^2)$ das Anfangswertproblem $y' = -200ty^2$ mit $y(0) = 1$ löst. Vergleichen Sie hierzu insbesondere die Verfahren hinsichtlich "Fehler gegen Anzahl Funktionsauswertungen" und "Fehler gegen vorgegebene Toleranz".

4.4. Bezeichne $S_\Delta(f)$ den Wert der summierten Trapezregel auf dem Gitter Δ zur Approximation von $\int_0^1 f(t)\,dt$. Sei $f(t) = 11/10t^\alpha$ mit $\alpha = 1/10$. Sei für $\beta > 0$ das Gitter $\Delta_N^\beta = (t_0, \ldots, t_N)$ gegeben durch $t_i = (i/N)^\beta$, $i = 0, \ldots, N$. Ziel der Aufgabe ist es, folgende Quadraturfehlerabschätzung zu zeigen:

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_{\Delta_N^\beta}(f) \right| \le C \begin{cases} N^{-4} & \text{falls } (1+\alpha)\beta > 4 \\ N^{-4} \ln N & \text{falls } (1+\alpha)\beta = 4 \\ N^{-(1+\alpha)\beta} & \text{falls } (1+\alpha)\beta < 4. \end{cases} \tag{1}$$

a) Für $z \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma(N) = \sum_{i=1}^N i^z$. Zeigen Sie, daß es Konstanten $C_{1,z}$, $C_{2,z}$, $C_{3,z}$ gibt (die nicht von N abhängen), so daß für $\Sigma(N)$ folgende Abschätzungen gelten:

$z > -1$	$z = -1$	$z < -1$
$\Sigma(N) \le C_{1,z} N^{z+1}$	$\Sigma(N) \le C_{2,z} \ln N$	$\Sigma(N) \le C_{3,z}$

b) Zeigen Sie, daß für $h_j = t_{j+1} - t_j$ gilt: $h_j \le CN^{-1} t_j^{1-1/\beta}$ ($j \ge 1$, $C > 0$ geeignet). Für das Element $I_0 = [t_0, t_1] = [0, t_1]$ gilt trivialerweise $h_0 = t_1$.

c) In der VO Numerik wurde eine Fehlerabschätzung für die summierte Simpsonregel gezeigt. Verwenden Sie diese, um für den Fehler zu zeigen:

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_{\Delta_N^\beta}(f) \right| \le C h_0^\alpha + \sum_{i=1}^{N-1} h_i^5 x_i^{\alpha-4}.$$

Schließen Sie hieraus, daß die gewünschte Abschätzung (1) gilt.

4.5. Betrachten Sie das AWP $y' = f(t, y)$, $y(0) = 0$ mit $f(t, y) = (11/10)\, t^{1/10}$.

a) Zeigen Sie: für jedes Gitter $\Delta = (t_0, \ldots, t_N)$ mit $t_0 = 0$ und $t_N = 1$ liefert das RK4-Verfahren gerade den Wert der summierten Simpsonregel (mit diesem Gitter) für $\int_0^1 \frac{11}{10} t^{1/10}\,dt$.

b) Welches Konvergenzverhalten (Fehler gegen N) erwarten Sie mit den graduierten Gittern Δ_N^β aus Aufg. 4.4?

c) Programmieren Sie das RK4-Verfahren auf den Gittern Δ_N^β aus Aufg. 4.4 für (i) $\beta = 1$ (d.h. uniforme Gitter), (ii) $\beta = 3$, (iii) $\beta = 4/1.1$, (iv) $\beta = 5$, sowie (vi) mittels des adaptiven Algorithmus aus Aufg. 4.2 (Toleranzen 10^{-n}, $n = 1, \ldots, 10$). Plotten Sie (doppelt logarithmisch) für alle Fälle den Fehler gegen die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen. Diskutieren das Verhalten der Verfahren anhand Ihrer Plots. Falls man die Gitter Δ_N^β aus Aufg. 4.4 verwendet, sollte man Ihrer Meinung nach β lieber zu groß oder zu klein wählen? Ist ein adaptives Verfahren besser als die "richtige" Wahl von β?

4.6. Es soll das Verhalten des adaptiven Algorithmus `rk4adaptive` für Quadraturprobleme mit stückweise glatten f analysiert werden. Als Modell betrachten wir $f(t, y)$ von der Form

$$f(t, y) = \begin{cases} f_1(t) & t < t_* \\ f_2(t) & t \ge t_* \end{cases}$$

wobei f_1, f_2 glatt sind, aber f bei $t = t_*$ einen Sprung hat.

a) Verwenden Sie Ihren adaptiven Algoritmus `rk4adaptive` aus Aufg. 2 mit $h_{min} = 0$ für von Ihnen gewählte Funktionen f_1, f_2, wobei $t_* \in (t_0, T)$. Was beobachten Sie?

b) Versuchen Sie, die Beobachtung aus Teilaufg. a) zu erklären. Betrachten Sie hierzu vereinfachend den Fall, daß f_1 und f_2 konstante Funktionen sind. Geben Sie den Konsistenzfehler $\tau(t, y, h)$ an. Tun Sie nun so, als ob Ihr Algorithmus den Konsistenzfehler nicht schätzt, sondern exakt zur Verfügung hat.

c) Betrachten Sie nun den Fall $h_{min} > 0$ und f wie in Teilaufg. a). Welchen Fehler (in Abhängigkeit von h_{min} und `tol`) zum Endzeitpunkt T erwarten Sie für Ihren Algorithmus `rk4adaptive`? Wie soll man also h_{min} sinnvoll wählen?

4.7. Zeigen Sie: ein Einschrittverfahren mit der folgenden Inkrementfunktion kann *nicht* Ordnung 3 haben:

$$\Phi(t, y, h, f) = b_1 f(t, y) + b_2 f(t + c_2 h, y + a_{21} h f(t, y)).$$