Serie 8

Abgabe: bis Fr., 8.5.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

8.1. (**schriftlich**) Sei m_C die Ordnung eines (impliziten) Adams-Moulton-Verfahrens mit k Schritten und m_P die Ordnung eines expliziten Verfahrens. Zeigen Sie, daß das Verfahren, welches durch $P(EC)^m$ beschrieben wird, die Konsistenzordnung $\min\{m_C, m_P + m\}$ hat. *Hinweis:* Sie können wieder annehmen, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und alle von Ihnen benötigten Ableitungen beschränkt sind.

8.2. Betrachten Sie das Prädiktor-Korrektor-Verfahren für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor.

a) Wie viele Iterationsschritte sind notwendig, damit das Prädiktor-Korrektor-Verfahren Konsistenzordnung 3 hat?

b) Welche Einschrittverfahren könnte man verwenden, um aus dem Anfangswert y_0 den zusätzlichen Startwert y_1 zu gewinnen, sodass man insgesamt ein explizites Verfahren der Ordnung 3 erhält? Geben Sie mindestens 2 verschiedene Einschrittverfahren für die Anlaufrechnung an.

8.3. (**Programmieraufgabe 8.3**) Man implementiere das Prädiktor-Korrektor-Verfahren für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor in Form einer MATLAB-Funktion

```
y = predcor(m,t,y0,y1,f)
```

Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit den Stützstellen, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^d$ sind Spaltenvektoren mit den Startwerten und f ist ein Funktionshandle für die Funktion $f(x, y)$. Der Parameter m gibt die Anzahl der Prädiktorschritte an. Der Ausgabewert ist eine Matrix $y \in \mathbb{R}^{d\times n}$, deren Spalten gerade die Approximationen zu den Zeitpunkten t sind. Verifizieren Sie Ihre Antworten zu Aufgabe 2 numerisch. Das Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 ist gegeben durch

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right).$$

8.4. **a)** Bestimmen Sie alle 2-Schrittverfahren der Konsistenzordnung (mindestens) 3. Dabei sei oBdA $\alpha_2 = 1$.

b) Welche dieser Verfahren sind nullstabil?

c) Gibt es unter den Verfahren auch explizite 2-Schrittverfahren? Sind diese nullstabil?

d) Gibt es unter den Verfahren auch solche der Ordnung 4? Sind diese nullstabil?

8.5. (*symplektisches Euler Verfahren*) Für ein Differentialgleichungssystem der Form

$$x' = f(x, y) \qquad y' = g(x, y) \tag{1}$$

definiert man einen Schritt des symplektischen Euler Verfahrens durch

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hg(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{aligned}$$

Sei nun $f(x, y) = y$, $g(x, y) = -x$.

a) Zeigen Sie: Jede Lösung von (1) liegt auf einem Kreis, d.h.

$$H(t) \equiv x^2(t) + y^2(t) = \text{constant} \qquad \forall t$$

b) Wenden Sie das symplektische Euler-Verfahren mit Schrittweite h auf die Differentialgleichung an und geben Sie die Abbildung $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ explizit an.

c) Zeigen Sie: Die numerische Approximation (x_i, y_i) liegt ebenfalls auf einer invarianten, geschlossenen Kurve. *Hinweis:* Es genügt zu zeigen, daß die Approximationen (x_i, y_i) auf einer Ellipse der Form

$$x_i^2 + hx_iy_i + y_i^2 \equiv \text{constant} \qquad \forall i$$

liegen.

8.6. (Mehrschrittverfahren variabler Schrittweite) Seien $t_0, \dots,$ Knoten und $h_i = t_{i+1} - t_i$ die Schrittweiten. Mit f_i bezeichnen wir $f(t_i, y_i)$. Formulieren Sie ein k-Schrittverfahren basierend auf dem Konstruktionsprinzip der Adams-Verfahren der Form

$$y_{i+1} - y_i = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}(h_{i+1}, h_i, \dots, h_{i+2-k}) f_{i+1-j}.$$

Geben Sie für den Fall $k = 2$ die Funktionen $b_{i,j}$, $j = 0, 1, 2$ an.

8.7. Betrachte eine autonome, dissipative ODE, d.h. $f(t, y) = f(y)$ für ein $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ und $\langle f(y) - f(\tilde{y}), y - \tilde{y}\rangle \leq 0$ für alle y, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^d$. Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, daß für dissipative ODEs, das Gleichungssystem des BDF-Verfahren (für $k \leq 6$) für jede Schrittweite $h > 0$ eindeutig gelöst werden kann. Hierzu dürfen Sie verwenden, daß $\alpha_k > 0$ für $0 \leq k \leq 6$.

a) Betrachten Sie die Funktion $y \mapsto F(y) := hf(y) - \alpha_k y - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k-j} y_{i+1-j}$. Zeigen Sie: F ist strikt dissipativ, d.h. es existiert $\varepsilon > 0$ so daß

$$\langle F(y) - F(\tilde{y}), y - \tilde{y}\rangle \leq -\varepsilon \|y - \tilde{y}\|^2 \qquad \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d.$$

b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit einer Nullstelle von F.

c) Betrachten Sie das AWP

$$y' = F(y), \qquad y(0) = \overline{y}$$

mit Lösung $y_{0,\overline{y}}$. Wählen Sie $T > 0$. Zeigen Sie: die Abbildung $\overline{y} \mapsto y_{0,\overline{y}}(T)$ hat einen eindeutigen Fixpunkt (*Hinweis:* Serie 1, Aufg. 1).

d) Zeigen Sie für die Lösung $\overline{y}$ aus Teilaufg. c): Die Funktion $t \mapsto y_{0,\overline{y}}(t)$ ist T-periodisch.

e) Zeigen Sie, daß $t \mapsto y_{0,\overline{y}}(t)$ konstant ist (*Hinweis:* betrachten Sie für beliebiges $t > 0$ $y_{t,y_{0,\overline{y}}(t)}(T) - y_{0,\overline{y}}(T)$).

f) Zeigen Sie, daß $F(\overline{y}) = 0$.