# Serie 9

Abgabe: bis Fr., 15.5.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

**9.1.** **a)** Für ein LMM bezeichnet $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \text{die NS von } \zeta \mapsto \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) \text{ erfüllen die Wurzelbedingung}\}$ das Stabilitätsgebiet. Definieren Sie die Funktion $\zeta \mapsto w(\zeta) := \rho(\zeta)/\sigma(\zeta)$. Zeigen Sie: $S \subset w(K_1(0))$, wobei $K_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{C}$ ist.

**b)** Zeigen Sie, daß für A-stabile LMM gilt:

$$\mathrm{Re}\, w(\zeta) \geq 0 \qquad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| > 1.$$

**c)** Zeigen Sie, daß explizite LMM nicht A-stabil sein können.

**d)** Die Adams-Moulton-Verfahren haben für $k \geq 2$ ein beschränktes Stabilitätsgebiet. Zeigen Sie eine (stark) vereinfachte Fassung dieses Resultates: Unter Verwendung der Tatsache, daß es ein $\zeta_k < -1$ gibt mit $\sigma(\zeta_k) = 0$, zeigen Sie, daß es ein $z_0 > 0$ gibt, so daß $(-\infty, -z_0)$ oder $(z_0, \infty)$ nicht im Stabilitätsgebiet liegt.

**9.2.** Untersuchen Sie, wieviele Lösungen das Randwertproblem

$$y' = ty^2, \qquad y(1) - y(0) = c$$

in Abhängigkeit vom Parameter $c$ hat.

**9.3.** (**Programmieraufgabe 9.3**) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[y, errs] = \texttt{simple\_shooting}(n, s)$$

welches das Randwertproblem

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \qquad y(0) = 4, \qquad y(1) = 1$$

mit dem einfachen Schießverfahren löst. Hierbei soll $n$ die Anzahl Newtonschritte sein, und der Rückgabewert $y$ soll der Funktionswert bei $t = 1/2$ sein. Der Parameter $s$ ist der Startwert für das Newtonverfahren (d.h. eine erste Approximation an $y'(0)$). Der Vektor `errs` hat die Länge $n$ und enthält die Fehler des Newtonverfahren. Genauer: $\texttt{errs}(i) = |y(1) - y_N^{(i)}| = |1 - y_N^{(i)}|$, wobei $y_N^{(i)}$ die Approximation an $y(1)$ ist, die im $i$-ten Newtonschritt erzielt wird. Verwenden Sie als Anfangswertproblemlöser die MATLAB-Routine `ode45`. *Hinweis:* Schreiben Sie wie in der Vorlesung die ODE zweiter Ordnung als ein System erster Ordnung. Formulieren Sie weiters ein System von ODEs, welches von $y$, $y'$, $\partial_s y$, $\partial_s y'$ gemeinsam gelöst wird.

**9.4.** In Aufg. 8.5 wurde das symplektische Eulerverfahren diskutiert, bei dem eine quadratische Erhaltungsgröße (näherungsweise) erhalten bleibt. Ziel der Aufgabe ist es, zu sehen, daß Gaußverfahren gewisse Erhaltungsgrößen (sog. "quadratische erste Integrale") exakt erhalten. Hierzu betrachten wir die *autonome* Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

**a)** Eine Funktion $\mathcal{E} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt *erstes Integral* der ODE, wenn für jeden Startwert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt: $t \mapsto \mathcal{E}(y_{t_0,y_0}(t))$ ist konstant. Zeigen Sie: $\mathcal{E}$ ist genau dann ein erstes Integral der ODE, wenn

$$\nabla\mathcal{E}(z) \cdot f(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

**b)** Sei $\mathcal{E}(y) := y^\top A y + b^\top y + c$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ ein erstes Integral der ODE.

Sei $y_1$ die Approximation, die sich durch Verwenden des $s$-stufigen Gaußverfahrens mit Schrittlänge $h > 0$ für die ODE $y' = f(y)$ mit Anfangswert $y_0$ ergibt. Zeigen Sie: $\mathcal{E}(y_1) = \mathcal{E}(y_0)$. *Hinweis:* Aufg. 6.2. Betrachten Sie das Kollokationspolynom $\pi \in \mathcal{P}_s$, das durch das Gaußverfahren definiert ist und die Differenz $\mathcal{E}(q(1)) - \mathcal{E}(q(0))$ für das Polynom $q : x \mapsto q(x) := \mathcal{E}(\pi(t_0 + xh))$

**9.5.** (**schriftlich**) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-(a(x)u')' + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega := (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 1. \tag{1}$$

Hier sind $a$ und $c \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $a$, $c > 0$ auf $\overline{\Omega}$. Ziel ist es zu zeigen, daß für $f \in C(\overline{\Omega})$ die eindeutige Lösung von (1) die Darstellung

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy \tag{2}$$

hat, wobei

$$G(x,y) = \frac{1}{\kappa} \begin{cases} U_0(x)U_1(y) & \text{für} \quad 0 \le y \le x \le 1 \\ U_1(x)U_0(y) & \text{für} \quad 0 \le x \le y \le 1 \end{cases}, \qquad \kappa = a(x)\left(U_0(x)U_1'(x) - U_0'(x)U_1(x)\right),$$

und die Funktionen $U_0$, $U_1$ sind die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{aligned} -(a(x)U_0')' + c(x)U_0 &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \qquad U_0(0) = 1, \quad U_0(1) = 0, \\ -(a(x)U_1')' + c(x)U_1 &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \qquad U_1(0) = 0, \quad U_1(1) = 1. \end{aligned}$$

**a)** Zeigen Sie, daß $\kappa$ konstant auf $\Omega$ ist. Zeigen Sie, daß $\kappa \neq 0$.

**b)** Zeigen Sie, daß die Formel (2) die Lösung von (1) liefert.

**9.6.** Betrachten Sie für glatte Koeffizienten $a$, $b$, $c$ den Differentialoperator

$$Lu = -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u. \tag{3}$$

Auf $\Omega$ sei ein Gitter definiert mit Knoten $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$ für $h = 1/N$. Definieren Sie für Gitterfunktionen $u_h = (u_i)_{i=0}^N$ die Operatoren $D_h^+$, $D_h^-$ durch

$$(D_h^+ u)_i := \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \qquad (D_h^- u)_i := \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

und die "symmetrische" Diskretisierung $L_h$ durch

$$(L_h u_h)_i = -a(x_i)(D_h^- D_h^+ u_h)_i + b(x_i)\frac{1}{2}\left((D_h^+ u_h)_i + (D_h^- u_h)_i\right) + c(x_i)u_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

**a)** Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung Konsistenzordnung 2 hat. Genauer: Für $u \in C^4(\overline{\Omega})$ (und, wie in der VO $u^h := [u]_h$ definiert durch $(u^h)_i = u(x_i)$ für $i = 0, \ldots, N$) gilt

$$\max_{i=1,\ldots,N-1} |(L_h u^h)_i - (Lu)(x_i)| \le Ch^2. \tag{4}$$

**b)** Wie sieht die Abschätzung in (4) aus, wenn lediglich $u \in C^3(\overline{\Omega})$?