Serie 10

Abgabe: bis Fr., 22.5.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

10.1. Betrachten Sie in Aufg. 9.6 den Fall $c \equiv 0$.

a) Zeigen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*: Sei h so klein, daß

$$a(x_i) \pm \frac{1}{2} h b(x_i) > 0 \qquad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \tag{1}$$

Dann gilt für alle Gitterfunktionen u_h:

$$(L_h u_h)_i \leq 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, N-1\} \qquad \Longrightarrow \qquad \max_{i=0,\dots,N} u_i \leq \max\{u_0, u_N\}.$$

b) Zeigen Sie die Existenz einer Gitterfunktion φ_h mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_h \geq 0, \qquad L_h \varphi_h \leq -1, \qquad \|\varphi_h\|_\infty \leq C \quad \text{für ein } C > 0 \text{ unabhängig von } h.$$

Hinweis: betrachten Sie die Funktion $e^{\lambda x}$ für geeignetes $\lambda > 0$.

10.2. (Fortsetzung von Aufg. 1)

a) Zeigen Sie, unter der Voraussetzung (1) daß für ein $C > 0$ unabhängig von h für alle Gitterfunktionen u^h gilt:

$$\|u^h\|_\infty \leq \max\{|u^h_0|, |u^h_N|\} + C \|L_h u^h\|_\infty$$

Schließen Sie, daß für jeden Vektor $f \in \mathbb{R}^{N-1}$ und alle u_{links}, $u_{rechts} \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem: finde $(u^h)_{i=0}^N$, so daß

$$(L_h u^h)_i = f_i, \qquad i = 1, \dots, N-1, \qquad u^h_0 = u_{links}, \qquad u^h_N = u_{rechts}$$

eine eindeutige Lösung hat und zudem

$$\|u^h\|_\infty \leq C \max\{|u_{links}|, |u_{rechts}|, \|f\|_\infty\}$$

gilt für ein $C > 0$ unabhängig von h.

b) Betrachten Sie das Randwertproblem: finde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so daß

$$Lu = f \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

für ein glattes $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, daß für die Diskretisierung aus Aufg. 9.6 die Fehlerabschätzung

$$\max_{i=0,\dots,N} |u(x_i) - u^h_i| \leq C h^2$$

gilt. Welche Konvergenz liefern Ihre Abschätzungen, wenn $f \in C^1(\overline{\Omega})$?

10.3. (**Programmieraufgabe 10.3**) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)^2$ das Problem

$$Lu := -\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2}$$

Das regelmäßige Gitter $\overline{\Omega}_h$ wird durch die Knoten $x_{ij} := (ih, jh)$, i, $j = 0, \dots, n+1$ mit $h = 1/(n+1)$ beschrieben. Der 5-Punkt-Stern und der 9-Punkt-Stern sind zwei Diskretisierungen von $-\Delta$, die Approximationen an $(-\Delta u)(x_{ij})$ für die inneren Knoten (d.h. $1 \leq i, j \leq n$) darstellen[1]:

$$\begin{aligned}
(L^5_h u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{h^2}\left(4u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i-1,j} - u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j-1}\right), \\
(L^9_h u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{6h^2}\left(20u^h_{i,j} - 4u^h_{i+1,j} - 4u^h_{i-1,j} - 4u^h_{i,j+1} - 4u^h_{i,j-1} - u^h_{i-1,j-1} - u^h_{i-1,j+1} - u^h_{i+1,j-1} - u^h_{i+1,j+1}\right).
\end{aligned}$$

[1] der 5-Punkt-Stern ist der in VO diskutierte

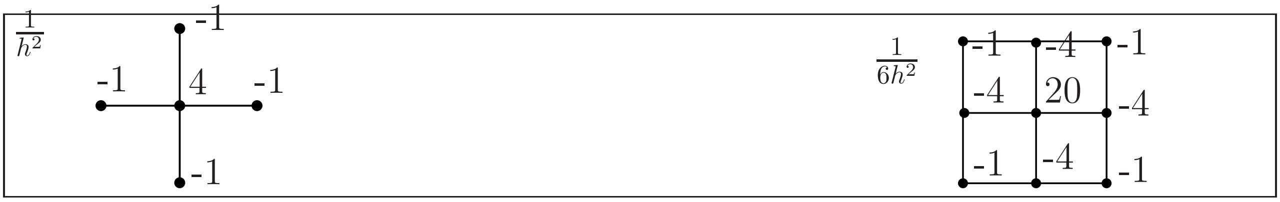

Abbildung 1: 5-Punkt (links) und 9-Punkt-Stern (rechts)

Diese Diskretisierungen werden kompakt wie in Fig. 1 dargestellt notiert. Als Gleichungssystem für die Approximationen u^h_{ij} in den inneren Knoten x_{ij} betrachten Sie 3 Fälle:

$$\begin{aligned}
(L^5_h u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \le i,j \le n,\\
(L^9_h u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \le i,j \le n,\\
(L^9_h u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{12}\left[8f(x_{ij}) + f(x_{i+1,j}) + f(x_{i-1,j}) + f(x_{i,j-1}) + f(x_{i,j+1})\right], \qquad 1 \le i,j \le n.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie 2 Matlabprogramme mit den Signaturen

$$A9 = \texttt{nine\_point\_stencil}(n) \qquad\qquad A5 = \texttt{five\_point\_stencil}(n),$$

welche die Matrizen $A9$ und $A5 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $N = n^2$ zurückgeben, die zu den Diskretisierungen L^5_h und L^9_h gehören. Verwenden `sparse`-Matrizen, d.h. legen Sie $A9$ und $A5$ mit `spalloc(N,N,9*N)` bzw. `spalloc(N,N,5*N)` an. Verwenden Sie für die Nummerierung der (inneren) Knoten die lexikographische Nummerierung, d.h. der Doppelindex (i,j) mit $1 \le i,j \le n$ hat die Nummer $\nu(i,j) = (i-1)n + j$. Sie dürfen annehmen, daß $n > 2$ ist.

Schreiben Sie weiters eine Routine mit der Signatur

$$[\texttt{u5}, \texttt{u9\_4}, \texttt{u9\_2}] = \texttt{poisson}(n, f)$$

wobei f ein *function handle* für eine Funktion $z = f(x,y)$ ist. Die Rückgabewerte sollten die Lösungsvektoren sein, die zu den 3 obigen Diskretisierungen gehören. Zum Testen Ihres Programms können Sie verwenden, daß die Funktion $u(x,y) = \sin(\pi x)\,\sin(\pi y)$ eine Lösung des obigen Randwertproblems mit $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ ist. Das Konvergenzverhalten ist $O(h^2)$ in den ersten beiden Fällen und $O(h^4)$ im letzten Fall.

10.4. Zeigen Sie, daß die Matrix $A9$ aus Aufg. 3 eine M-Matrix ist. Geben Sie eine explizite Abschätzung für $\|A9^{-1}\|_\infty$ an. *Hinweis:* Satz 6.10 ("M-Kriterium").

Sei u^h die Gitterfunktion, die durch Lösen von $L^9_h u^h = B_h f^h$ entsteht, wobei $B_h f^h$ definiert ist als

$$(B_h f^h)(x_{ij}) = \frac{1}{12}\left(8f^h(x_{i,j}) + f^h(x_{i+1,j}) + f^h(x_{i-1,j}) + f^h(x_{i,j+1}) + f^h(x_{i,j-1})\right), \qquad 1 \le i,j \le n.$$

Zeigen Sie, daß $\|[u]_h - u^h\|_\infty \le Ch^4$, falls die gesuchte Lösung u hinreichend glatt ist. *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß man durch Taylorentwicklung nachrechnen kann, daß

$$\|L^9_h[u]_h - B_h([-\Delta u]_h)\|_\infty \le Ch^4 \max_{|\alpha|=6} \|D^\alpha u\|_{C([0,1]^2)} \qquad \forall u \in C^6([0,1]^2).$$

10.5. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ist, wobei A_{11} und A_{22} nichttriviale quadratische Matrizen sind. A heißt *irreduzibel*, falls A nicht reduzibel ist. A hat die *Ketteneigenschaft*, falls, es zu jedem Paar $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ eine Folge $i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j$ gibt, so daß

$$A_{i_0,i_1},\ A_{i_1,i_2}, \dots, A_{i_{\ell-1},i_\ell} \ne 0. \tag{3}$$

Zeigen Sie: A irreduzibel $\Longleftrightarrow$ A hat die Ketteneigenschaft. *Hinweis:* zeigen Sie A reduzibel $\Longleftrightarrow$ A hat nicht die Ketteneigenschaft. Betrachten Sie für geeignete i die Menge $\mathcal{E}(i) := \{j \mid \exists \text{Kette } i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j \text{ mit } (3)\}$ der von i aus "erreichbaren" Indizes.

10.6. (**schriftlich**) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definieren Sie die (offenen) *Gerschgorinkreise*

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| < r_i\}, \qquad r_i := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

a) Zeigen Sie: Das Spektrum $\sigma(A)$ ist im Abschluß der Vereinigung der Gerschgorinkreise enthalten:

$$\sigma(A) \subset \cup_{i=1}^{n} \mathrm{clo}(K_i); \qquad \mathrm{clo}(K_i) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| \leq r_i\}.$$

b) Zeigen Sie: falls A die Ketteneigenschaft hat (oder: A ist irreduzibel—siehe Aufg. 5), dann ist

$$\sigma(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \partial K_i\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $\lambda \in \sigma(A) \setminus \cup_{i=1}^{n} K_i$ und zeigen Sie, daß dann $\lambda \in \cap_{i=1}^{n} \partial K_i$. Hierzu sei oBdA ein zu λ gehöriger EV ξ zu $\|\xi\|_\infty = 1$ normiert. Dann gilt für jeden Index m mit $|\xi_m| = 1$, daß $\lambda \in \partial K_m$. Überlegen Sie sich, daß dann auch $|\xi_{m'}| = 1$ gilt für jeden Index m' mit $|A_{m,m'}| \neq 0$. Nutzen Sie dann die Ketteneigenschaft.