Serie 11

Abgabe: bis Fr., 29.5.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

11.1. **a)** Zeigen Sie: für strikt diagonal dominante Matrizen A mit Diagonale D gilt für den Spektralradius von $I - D^{-1}A$, daß $\rho(I - D^{-1}A) < 1$.

b) A heißt irreduzibel diagonal dominant, wenn A irreduzibel ist und

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| \leq |A_{ii}| \qquad \forall i$$

und eine strikte Ungleichung für mindestens einen Index i gilt. Zeigen Sie: Es gilt $\rho(I - D^{-1}A) < 1$. *Hinweis:* verwenden Sie Aufg. 10.6. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß D^{-1} existiert (dies könnte man aus der Irreduzibilität von A folgern).

11.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *inversmonoton*, falls ($\leq$ ist bei Vektoren komponentenweise zu verstehen)

$$Ax \leq Ay \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq y.$$

Zeigen Sie: eine inversmonotone Matrix A ist invertierbar, und $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).

11.3. Sei A eine L-Matrix (d.h. $A_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ und $A_{ii} > 0$ für alle i). Es gilt die Äquivalenz: A ist eine M-Matrix $\Longleftrightarrow \rho(I - D^{-1}A) < 1$. Zeigen Sie von dieser Äquivalenz die Richtung $\Longleftarrow$. Schließen Sie mit Aufg. 11.1, daß irreduzibel diagonal dominante Matrizen M-Matrizen sind.

In Aufg. 10.4 wurde gezeigt, daß die Matrix A9 eine M-Matrix ist. Überlegen Sie sich einen alternativen Beweis, indem sich sich überlegen, daß A9 irreduzibel ist (d.h. die Ketteneigenschaft hat).

11.4. (**schriftlich**) Betrachten Sie den allgemeinen 9-Punkt-Stern wie in Abb. 1 beschrieben zur Approximation von $-\Delta$. Der Konsistenzfehler $\tau(h)$ an der Stelle (x, y) ist dann definiert als

$$\begin{aligned}
\tau(h,u) \quad := \quad & \Big| -(-\Delta u)(x,y) + \\
& \frac{1}{h^2}\Big(c_{0,0}u(x,y) + c_{-1,0}u(x-h,y) + c_{1,0}u(x+h,y) + \\
& c_{-1,-1}u(x-h,y-h) + c_{0,-1}u(x,y-h) + c_{1,-1}u(x+h,y-h) + \\
& c_{-1,1}u(x-h,y+h) + c_{0,1}u(x,y+h) + c_{1,1}u(x+h,y+h)\Big)\Big|
\end{aligned}$$

Die durch den Stern beschriebene Diskretisierung heißt *konsistent* von der Ordnung p (bei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), falls es für jedes $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine Konstante $C > 0$ und ein $h_0 > 0$ gibt, so daß für alle $0 < h \leq h_0$ gilt: $\tau(h, u) \leq Ch^p$.

a) Sei $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Der Stern hat Konsistenzordnung p genau dann wenn $\tau(h, \pi) = 0$ für alle $\pi \in \mathcal{P}_{p+1}$ und alle $h > 0$.

b) Zeigen Sie: es gibt keinen 9-Punkt-Stern, der Konsistenzordnung $p \geq 3$ hat. *Hinweis:* betrachten Sie die Polynome $\pi_1 : (x, y) \mapsto x^2$ und $\pi_2 : (x, y) \mapsto x^4$.

11.5. Sei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ ein beliebiges Gitter auf $\Omega = (0, 1)$. Sei $h_i = x_{i+1} - x_i$ für $i = 0, \ldots, N - 1$. Betrachten Sie die Diskretisierung von $-u'' = f$ auf $\Omega = (0, 1)$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ durch

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0, \quad -\frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N - 1.$$

Zeigen Sie: Einsetzen der Bedingungen $u_0 = 0$ und $u_N = 0$ führt auf ein LGS $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ für die Unbekannten $u_1, \dots, u_{N-1}$, wobei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ eine M-Matrix ist.

11.6. (**Programmieraufgabe 11.6**) Es soll

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{auf } \Omega = (0,1)^2, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

mit einem Differenzenverfahren gelöst werden. Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[\texttt{sol}, \texttt{nr\_steps}] = \texttt{nonlinear\_solve}(\texttt{n}, \texttt{u0}, \texttt{tol}, \texttt{f}),$$

welches das Randwertproblem numerisch löst. Hier gibt wie in Programmieraufg. 10.3 der Parameter n die Anzahl Punkte pro Richtung an, `u0` ist der Startvektor für das Newtonverfahren, und `tol` ist die Toleranz für das Newtonverfahren. Schließlich ist f ein *function handle* für eine Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Verwenden Sie zur Diskretisierung von $-\Delta$ den 5-Punkt-Stern aus Programmieraufg. 10.3. Die Abbruchbedingung für das Newtonverfahren ist der Einfachheit halber so, daß die $\|\cdot\|_\infty$-Norm zweier aufeinanderfolgender Newtoniterierte $\leq$ `tol` ist. Der Rückgabevektor `sol` ist der Vektor der Knotenwerte, `nr_steps` gibt die Anzahl benötigter Newtonschritte an.
Zum Testen: für eine glatte Lösung erwarten Sie $O(h^2)$-Konvergenz.

Zusatzaufgabe: Wie kann ein Verfahren der Ordnung 4 erzeugt werden? *Hinweis:* Aufg. 10.4.

Abgabe der als **schriftlich** gekennzeichnete Aufgaben: bei Frau Kovalj (4. Stock, grüner Turm) bis zum o.a. Termin

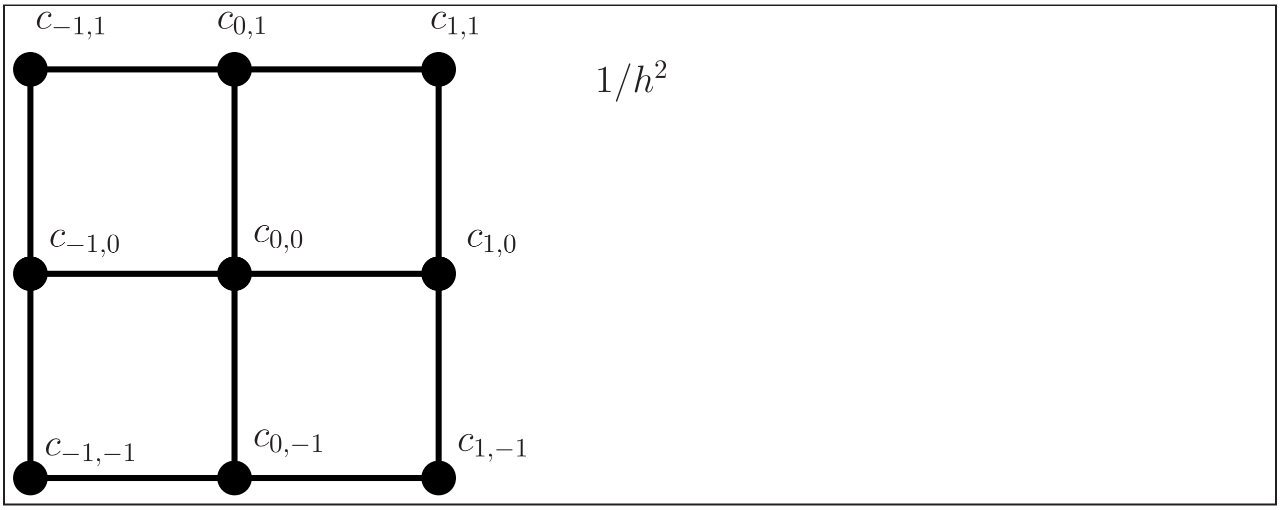

Abbildung 1: allg. 9-Punkt-Differenzenstern