Serie 12

Abgabe: bis Fr., 5.6.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

12.1. (**schriftlich**) Sei $u \in C^1_{st.w.}(-1,1)$, d.h. es gebe eine Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = 1$ derart, daß $u|_{(x_i,x_{i+1})} \in C^1([x_i, x_{i+1}])$ für $i = 0, \dots, M-1$.

a) Zeigen Sie: ist zusätzlich $u \in C([-1,1])$, dann hat u eine schwache Ableitung, welche auf jedem Teilintervall mit der klassischen (punktweise definierten) Ableitung übereinstimmt.

b) Hat die Heavisidefunktion H gegeben durch $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$ eine schwache Ableitung? Ist die Bedingung $u \in C(\overline{\Omega})$ in Teilaufg. a) notwendig?

12.2. Betrachten Sie auf $\Omega = (0,1)$ die Funktion $u(x) = x^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in L^2(\Omega)$? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in H^1(\Omega)$?

12.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

a) Zeigen Sie: $H^1_0(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$. *Hinweis:* Sie dürfen die Aussage der VO verwenden, daß $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H^1(\Omega)$. Überlegen Sie sich, daß für jedes $\overline{x} \in \Omega$ die Abbildung $H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u \mapsto u(\overline{x})$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, daß $H^1(\Omega)$ vollständig ist. *Hinweis:* Sie dürfen die Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ verwenden.

c) Für $u \in H^1(\Omega)$ bezeichne die reelle Zahl $\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\,dy$ den Mittelwert von u über Ω. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C_\Omega > 0$, so daß für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x) - u(y)\,dy$ für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

12.4. (Variationsungleichungen) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von Satz 7.1 der Vorlesung: Sei V Vektorraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform mit $a(u,u) \geq 0$ für alle $u \in V$. Sei $l : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform. Definiere

$$J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto J(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - l(u)$$

Sei $\mathcal{U} \subset V$ eine konvexe (nichtleere) Menge. Dann gilt: $u \in \mathcal{U}$ ist genau dann ein Minimierer von J, falls

$$a(u, v-u) \geq l(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}.$$

12.5. Analog zum 1D Fall gilt: eine (global) stetige Funktion, die stückweise glatt ist, ist in H^1. Zeigen Sie folgenden Spezialfall: Sei $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ und $\Omega_1 = (-1,0) \times (0,1)$ sowie $\Omega_2 = (0,1) \times (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\Omega_i} \in C^1(\overline{\Omega_i})$ für $i \in \{1,2\}$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$.

12.6. Sei $\Omega \subset (0,L)^2 \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2L|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in C^\infty_0(\Omega).$$

Schließen Sie:

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1+4L^2}|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in C^\infty_0(\Omega).$$

12.7. (**Programmieraufgabe 12.7**) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[\texttt{A}, \texttt{l}] = \texttt{FEM\_1D}(\texttt{x}, \texttt{f})$$

welches die Steifigkeitsmatrix **A** und den Lastvektor **l** für das Problem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

bestimmt. Sie können annehmen, daß der Vektor $x = (x_0, \ldots, x_N)$ geordnet ist (d.h. $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$); es ist $\Omega = (x_0, x_N)$. f soll ein *function handle* auf eine Funktion sein. Die FEM-Diskretisierung soll mit den klassischen stückweise linearen Ansatzfunktionen realisiert werden. Approximieren Sie die Integrale auf dem Referenzelement, die bei der Bestimmung des Lastvektors auftreten, mit der Mittelpunktsregel. Verwenden Sie ein geeignetes *sparse* Format für die Matrix A. Sie dürfen voraussetzen, daß $\texttt{length}(x) \geq 3$.

12.8. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-u'' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Sei $c \geq 0$ und $c \in C(\overline{\Omega})$. Eine *schwache* Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ ist definiert als die Lösung der Aufgabe:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d.} \qquad a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $a(u,v) = \int_\Omega u'v' + c(x)uv$.

a) Zeigen Sie: ist $f \in C(\overline{\Omega})$ und erfüllt eine schwache Lösung die Regularitätsvoraussetzung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so ist u eine klassische Lösung.

b) Die klassische FEM für das RWP (1) führt wieder auf ein LGS der Form $\mathbf{Au} = \mathbf{l}$. Formulieren Sie den Algorithmus zum Aufstellen von **A** und **l**. Zeigen Sie, daß **A** SPD ist.

12.9. (Monotone Konvergenz der FEM in der Energie) Betrachten Sie $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$ auf $H_0^1(\Omega)$. Seien $V_N \subset V_{N'} \subset H_0^1(\Omega)$ zwei Unterräume. Es gelte für $u \in H_0^1(\Omega)$ und $u_N \in V_N$, $u_{N'} \in V_{N'}$:

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in V_N, \qquad a(u_{N'}, v) = l(v) \quad \forall v \in V_{N'}$$

a) Zeigen Sie:

$$a(u - u_{N'}, u - u_{N'}) = |u - u_{N'}|^2_{H^1(\Omega)} \leq |u - u_N|^2_{H^1(\Omega)} = a(u - u_N, u - u_N).$$

b) Zeigen Sie:

$$a(u,u) - a(u_N, u_N) = a(u - u_N, u - u_N).$$

c) Sei $\{\varphi_i \,|\, i = 1, \ldots, N\}$ eine Basis von V_N und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ die Steifigkeitsmatrix bzw. der Lastvektor. Zeigen Sie: für die FEM-Approximation $u_N \in V_N$ gilt: $a(u_N, u_N) = \mathbf{u}^\top \mathbf{l}$.