Serie 13

Abgabe: bis Fr., 19.6.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

13.1. In Aufg. 12.7 wurde der Lastvektor nicht exakt ausgewertet, sondern durch numerische Quadratur approximiert. Es soll nun gezeigt werden, daß dieser "Fehler" nur einen weiteren Fehler $O(h)$ erzeugt. Sei $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$ und sei für $f \in C^2(\overline{\Omega})$ die Linearform l definiert durch $l(v) = \int_\Omega fv$. Definiert man für ein Gitter $\mathcal{T}$ den Operator $I_0 : C(\overline{\Omega}) \to S^0(\mathcal{T}) := \{u \in L^2(\Omega) \,|\, u|_K = \text{konstant} \quad \forall K \in \mathcal{T}\}$ durch

$$(I_0 w)|_K := w(m_K), \qquad m_K = \text{Schwerpunkt von } K,$$

so erfüllen die "exakte" FEM Lösung $u_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ aus Aufg. 12.7 und die numerisch realisierte $\widetilde{u}_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ die Gleichungen

$$a(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in S^1_0(\mathcal{T}), \qquad a(\widetilde{u}_N, v) = \widetilde{l}(v) := \int_\Omega I_0(fv) \quad \forall v \in S^1_0(\mathcal{T}).$$

a) Zeigen Sie:

$$|u_N - \widetilde{u}_N|_{H^1(\Omega)} \le \sup_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \frac{|l(v) - \widetilde{l}(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}}.$$

b) Zeigen Sie: falls $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$ (mit $h_K = \operatorname{diam} K$), so ist

$$\sup_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \frac{|l(v) - \widetilde{l}(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}} \le Ch^2 \sum_{j=1}^{2} \|f^{(j)}\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, daß für jedes $v \in S^1_0(\Omega)$ und $K \in \mathcal{T}$ gilt: $v|_K \in \mathcal{P}_1$.

13.2. (schriftlich) (Aubin-Nitsche Trick) Sei wieder $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$. Sei $u_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ die FEM-Approximation. Definieren Sie den Fehler $e := u - u_N \in H^1_0(\Omega)$. Ziel ist zu zeigen:

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \le Ch\|e\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1}$$

d.h. der Fehler gemessen in L^2 ist eine h-Potenz besser als der Fehler gemessen in H^1.

a) Definieren Sie ψ als (klassische) Lösung von

$$-\psi'' = e \quad \text{auf } \Omega, \qquad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Dann gilt:

$$a(v, \psi) = \int_\Omega ev \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega), \qquad \inf_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \|\psi - v\|_{H^1(\Omega)} \le Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

b) Zeigen Sie die Abschätzung (1). *Hinweis:* Überlegen Sie sich, daß $\|e\|^2_{L^2(\Omega)} = a(e, \psi)$ gilt.

13.3. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega := (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Aus Aufg. 9.5 ist die Green'sche Funktion G für dieses Randwertproblem bekannt. Sei $\mathcal{T}$ ein beliebiges Gitter auf Ω mit Knoten x_i, $i = 0, \ldots, N$.

a) Zeigen Sie: für jeden inneren Knoten x_i des Gitters ist die Funktion $G(\cdot, x_i) \in S_0^1(\mathcal{T})$.

b) Zeigen Sie: die FEM-Approximation $u_N \in S_0^1(\mathcal{T})$ ist gerade der stückweise lineare Interpolant der (gesuchten) exakten Lösung, d.h. $u(x_i) = u_N(x_i)$ für alle Knoten x_i des Gitters.

13.4. (1D inverse Abschätzung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{T}$ ein Gitter auf Ω. Mit h_K, $K \in \mathcal{T}$, seien die Elementdurchmesser bezeichnet und $h_{min} = \min_{K\in\mathcal{T}} h_K$.

a) Sei $\widehat{K} := (-1, 1)$ das Referenzelement. Zeigen Sie: Es gibt ein $C > 0$, so daß

$$\|w\|_{H^1(\widehat{K})} \leq C\|w\|_{L^2(\widehat{K})} \qquad \forall w \in \mathcal{P}_1$$

b) Zeigen Sie:

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C\frac{1}{h_{min}}\|w\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall w \in S^1(\mathcal{T}).$$

Hinweis: Sei $F_K : \widehat{K} \to K$ die affine Elementabbildung. Überlegen Sie sich, in welcher Beziehung $\|\widehat{w}'\|_{L^2(\widehat{K})}$ und $\|w'\|_{L^2(K)}$ bzw. $\|\widehat{w}\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|w\|_{L^2(K)}$ zu einander stehen, falls $\widehat{w} := w \circ F_K$.

13.5. Sei $\Omega = (0, 1)$ und $a(u, v) = \int_\Omega u'v'$. Sei $V_N \subset H_0^1(\Omega)$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Die Abbildung $R_N : H_0^1(\Omega) \to V_N$, die durch die Beziehung

$$a(R_N u, v) = a(u, v) \qquad \forall v \in V_N$$

heißt *Ritzprojektor*. Zeigen Sie:

a) R_N ist eine lineare Abbildung: $R_N(u + \lambda v) = R_N u + \lambda R_N v$ für alle u, $v \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

b) R_N ist ein Projektor, d.h. $R_N u = u$ für alle $u \in V_N$

c) Es existiert $C > 0$, so daß $\|R_N u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$

d) Es existiert $C > 0$, so daß $\|u - R_N u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v\in V_N} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$.

13.6. Seien $\mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ beide SPD. Definieren Sie zwei Skalarprodukte $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathbf{A}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathbf{M}$ auf $\mathbb{R}^N$ durch $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_\mathbf{A} := \mathbf{u}^\top\mathbf{A}\mathbf{v}$ und $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_\mathbf{M} := \mathbf{u}^\top\mathbf{M}\mathbf{v}$. Zeigen Sie: Es existieren Eigenpaare $(\mathbf{v}_i, \lambda_i) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, N$ des verallgemeinerten EWP

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{v}_i$$

mit der Eigenschaft

$$\langle v_i, v_j\rangle_\mathbf{M} = \delta_{ij}, \qquad \langle v_i, v_j\rangle_\mathbf{A} = \lambda_i\delta_{ij}.$$

Insbesondere bilden die $\mathbf{v}_i$ damit eine Basis des $\mathbb{R}^N$. *Hinweis:* EWP $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

13.7. Sei $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Vorab zur Begriffsbildung: Für eine Funktion $f : \Omega \to Y$ (Y Hilbertraum) und $t \in \Omega$ bezeichnet $f'(t) := \lim_{h\to 0} h^{-1}(f(t + h) - f(t))$ die Ableitung von f (natürlich nur sofern der Limes in Y existiert). Falls f stetig ist und f' für jedes $t \in \Omega$ existiert und falls die Funktion $f' : \Omega \to Y$ stetig ist, schreiben wir $f \in C^1(\Omega, Y)$.

Für den Hilbertraum $X = L^2(\Omega)$ oder $X = H_0^1(\Omega)$ kann eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in kanonischer Weise[1] als Funktionen $f : \mathbb{R} \to X$ betrachtet werden mittels der Interpretation als $t \mapsto f(\cdot, t)$.

a) für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $(x, t) \mapsto e^t x^\alpha(1 - x)$ in $C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$?

b) Ist die Funktion $(x, t) \mapsto \frac{\sqrt{t}}{x+t}$ ein Element von $C([0, 1]; L^2(\Omega))$?

Abgabe der als **schriftlich** gekennzeichnete Aufgaben: bei Frau Kovalj (4. Stock, grüner Turm) bis zum o.a. Termin

[1] man verwendet das gleiche Symbol "f", obwohl strikt genommen zwei verschiedene Funktionen vorliegen