Serie 1

Abgabe: bis Fr., 5.3.2010, 12 Uhr bei Frau Kovalj

1.1. (**schriftlich**) Zeigen Sie, daß die Rayleighquotienteniteration lokal quadratisch konvergiert. Genauer: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar (mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ und zugehörigen Eigenwerten λ_i, $i = 1, \dots, n$). Dann existieren $\varepsilon_0 > 0$ und $C > 0$ so daß für jedes $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ gilt: Falls $x_0 \in \mathbb{C}^n$ die Bedingung $d(\operatorname{span}\{x_0\}, \operatorname{span}\{v_1\}) < \varepsilon$ erfüllt, dann gilt mit $\widetilde{\lambda} := x_0^H A x_0 / \|x_0\|_2^2$, daß $x_1 := (A - \widetilde{\lambda})^{-1} x_0$

$$d(\operatorname{span}\{x_1\}, \operatorname{span}\{v_1\}) \leq C\varepsilon^2 \tag{1}$$

erfüllt. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß $A - \widetilde{\lambda}$ invertierbar ist. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Sie können jedes $x \in \mathbb{C}$ eindeutig in der Form $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) v_i$ schreiben. Zeigen sie: Die Abbildung $x \mapsto \sum_{i=1}^n |\alpha_i(x)|$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^n$.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $\widetilde{C} > 0$, so daß für jedes $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\widetilde{C}^{-1} \frac{\sum_{i\geq 2} |\alpha_i(x)|}{\sum_{i\geq 1} |\alpha_i(x)|} \leq d(\operatorname{span}\{x\}, \operatorname{span}\{v_1\}) \leq \widetilde{C} \frac{\sum_{i\geq 2} |\alpha_i(x)|}{\sum_{i\geq 1} |\alpha_i(x)|}.$$

c) Sei $\|v_1\|_2 = 1$. Zeigen Sie: Es existieren $\varepsilon_0 > 0$ und $C' > 0$, so daß für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ und $x \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$ gilt: $d(\operatorname{span}\{x\}, \operatorname{span}\{v_1\}) \leq \varepsilon$ impliziert $\|x\|_2 - C'\varepsilon \leq |\alpha_1(x)| \leq \|x\|_2 + C'\varepsilon$.

d) Zeigen Sie (1).

1.2. **a)** Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Die Funktion f erfülle eine *einseitige Lipschitzbedingung* mit Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\langle f(t,y) - f(t,z), y - z\rangle_2 \leq L\langle y - z, y - z\rangle_2 \qquad \forall (t,y), (t,z) \in G.$$

Zeigen Sie folgende Aussage über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $[t_0, T] \subset J$ und seien y, $z \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ Lösung der Differentialgleichung, d.h.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{und} \qquad z'(t) = f(t, z(t)) \qquad \forall t \in J.$$

Dann gilt für alle $t \in [t_0, T]$:

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq \|y(t_0) - z(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $m(t) = \|y(t) - z(t)\|_2^2$; studieren Sie den Beweis des Gronwall-Lemmas.

b) Schließen Sie, daß für Funktionen f, die eine einseitige Lipschitzbedingung erfüllen, die Fortsetzung nach rechts eindeutig ist.

1.3. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t), \qquad y(0) = g(0) + \delta, \tag{2}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ beschränkt und $\delta \in \mathbb{R}$ sei.

a) Lösen Sie (2).

b) Diskutieren Sie die Wirkung der Störung δ für die drei Fälle $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$.

c) Visualisieren Sie die Lösung für $\delta = 0$ und $\delta = 10^{-2}$ mit $g(t) = \arctan t$ bzw. $g(t) = e^{-t^2}$.

1.4. Gegeben sei auf $G = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(t, y) = \sqrt{|1 - y^2|}.$$

Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung(en) des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = 0.$$