Serie 2

Abgabe: bis Fr., 12.3.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

2.1. (**schriftlich**) Für hinreichend glatte Funktionen f bezeichnet $t \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$ die (eindeutige) Lösung des AWPs

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Ziel der Aufgabe ist, die stetige Differenzierbarkeit der Funktion $y_0 \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$ zu zeigen.

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in C^2(G,\mathbb{R})$. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$ und $y_{t_0,y_0} \in C^1(J,\mathbb{R})$ die Lösung des AWP (1). Definieren Sie die Funktion R als Lösung des *linearen* AWPs

$$R'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\, R(t), \qquad R(t_0) = 1. \tag{2}$$

Zeigen Sie mit Satz 1.5 der Vorlesung, daß für $\Delta_h(t) = \frac{1}{h}\left(y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\right)$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h(t) = R(t), \qquad t \in J.$$

Schließen Sie, daß $R(t) = \frac{\partial}{\partial y_0} y_{t_0,y_0}(t)$.

Hinweis: Setzen Sie $\delta(t) := \Delta_h(t) - R(t)$ und versuchen Sie, für δ eine Differentialgleichung der Form $\delta'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\delta(t) + z(t,h)$ zu finden. Kontrollieren Sie z mittels Satz 1.5 der VO.

2.2. Betrachten Sie das *autonome* Anfangswertprobleme

$$y' = f(t,y) := Ay + g(y), \qquad y(0) = y_0, \tag{3}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reell diagonalisierbare Matrix ist, deren Eigenwerte λ_i, $i = 1,\dots,n$ die Bedingung $\lambda_i \le -\rho < 0$, $i = 1,\dots,n$ erfüllen. Die Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ erfüllt für ein $C_g > 0$ die Abschätzung $\|g(y)\|_2 \le C_g \|y\|_2^2$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$.

- **a)** Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so daß für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\|_2 \le \varepsilon$ jede auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ von (3) die asymptotische Beziehung $\lim_{t\to\infty} \|y(t)\|_2 = 0$ erfüllt. *Hinweis:* Sehen Sie sich noch einmal den Beweis von Serie 1, Aufg. 2 an.
- **b)** In Teilaufg. a) wurden nur Lösungen betrachtet, die auf ganz $\mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie: Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ folgt (z.B. mit Hilfe Aussage über die Mindestlänge des Existenzintervalls des Satzes von Picard-Lindelöf), daß für jedes (offene) Intervall $J = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $a < 0$ gilt: Jede Lösung $y \in C^1(J,\mathbb{R}^n)$ von (3) läßt sich zu einer Lösung von (3) auf (a,∞) (eindeutig) fortsetzen.
- **c)** Gilt die Aussage aus Teilaufg. b), daß sich Lösungen "bis ∞" fortsetzen lassen, auch für "große" ε oder muß mit "blow up" gerechnet werden?

2.3. Zeigen Sie das *diskrete Gronwall-Lemma*: Seien $(e_i)_{i=0}^N$, $(\eta_i)_{i=0}^N$, $(\delta_i)_{i=0}^N$ drei Folgen mit nicht-negativen Elementen, die

$$e_{i+1} \le (1+\delta_i)e_i + \eta_i, \qquad i = 0,\dots,N-1$$

erfüllen. Dann ist

$$|e_i| \le \left(e_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_j\right) e^{\sum_{j=0}^{i-1}\delta_j} \qquad i = 0,1,\dots,N. \qquad \text{(Konvention: leere Summe = 0)}$$

2.4. Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y) \text{ in } [a,b], \qquad y(a) = y_0$$

wird ein explizites Einschrittverfahren verwendet gemäß der Rekursion

$$y_{\nu+1} = y_\nu + h_\nu \Phi(t_\nu, y_\nu, h_\nu) \text{ für } \nu = 0,1,2,\dots N-1.$$

Weiters sei $\tilde{y}_\nu$ eine Folge, die dadurch entsteht, daß in jedem Schritt eine Störung gemacht wird (z.B. durch Rundungsfehler):

$$\tilde{y}_{\nu+1} = \tilde{y}_\nu + h_\nu \Phi(t_\nu, \tilde{y}_\nu, h_\nu) + \varepsilon_\nu.$$

Nehmen Sie an, daß die Störungen ε_ν die Abschätzung $|\varepsilon_\nu| \leq \varepsilon$ für alle ν erfüllen. Zeigen Sie: Ist die Inkrementfunktion $\Phi(t, y, h)$ Lipschitz-stetig in y mit Lipschitzkonstante $L > 0$, so gilt

$$|y_\nu - \tilde{y}_\nu| \leq (|y_0 - \tilde{y}_0| + \nu\varepsilon) \exp(L|t_\nu - t_0|), \qquad \nu = 0, \ldots, N.$$

2.5. (**Programmieraufgabe 2.5**)
Das explizite Eulerverfahren ist durch $y_\nu = y_{\nu-1} + hf(t_{\nu-1}, y_{\nu-1})$ definiert. Implementieren Sie für den Spezialfall $f(t, y) = M(t)y + g(t)$ das explizite Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = (b-a)/N$ zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y) \text{ in } [a, b], \qquad y(a) = y_0.$$

Dabei kann die gesuchte Lösung $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vektorwertig sein, $M(t)$ ist in diesem Fall eine $n \times n$ Matrix. Der MATLAB-Funktion

```
[t,y] = euler(a,b,N,y0,M,g)
```

soll neben den Daten a, b, N und y_0 auch die Function-Handles der Funktionen `Mt=M(t)` und `gt=g(t)` übergeben werden. Die übergebenen Funktionen können dann beispielsweise mit `Mt=feval(M,t)` aus der Funktion `euler` heraus aufgerufen werden. Als Rückgabeparameter liefere die Funktion `euler` den Sützstellenvektor $t \in \mathbb{R}^{N+1}$ und die Matrix der dazugehörigen Funktionswerte $y \in \mathbb{R}^{n\times(N+1)}$, d.h. die $\nu + 1$-te Spalte von y entspricht der Approximation y_ν an der Stelle t_ν.

Betrachten Sie das (skalare) Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$ auf dem Intervall $[t_0, T] = [0, 1]$. Verwenden Sie Ihr Programm für $N = 128, 256, 512$, um Approximationen in den Knoten t_i, $i = 0, \ldots, N$ zu erhalten. Plotten Sie den Fehler $|y_i - y(t_i)|$ gegen t_i, $i = 0, \ldots, N$. Wie verhält sich der Fehler "als Funktion der Zeit"?

2.6. (**Programmieraufgabe 2.6**)
Das implizite Eulerverfahren ist durch $y_\nu = y_{\nu-1} + hf(t_\nu, y_\nu)$ definiert. Schreiben Sie unter denselben Voraussetzungen wie in der Programmieraufgabe 2.5 eine MATLAB-Funktion

```
[t,y] = ieuler(a,b,N,y0,M,g)
```

die das implizite Eulerverfahren realisiert. Vergleichen Sie die Fehler $|y(1) - y_N(1)|$ für explizites und implizites Eulerverfahren im (doppelt logarithmischen) Plot über $N = 2^i$, $i = 1, \ldots, 10$. Als Beispiel nehmen Sie das Modellproblem

$$y' = \lambda y \text{ auf } [0, 1], \qquad y(0) = 1$$

mit exakter Lösung $y(t) = \exp(\lambda t)$ für verschiedene konstante Werte von $\lambda \in \{\pm 1, \pm 10\}$