Serie 6

Abgabe: bis Fr., 23.4.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

In Serie 1, Aufg. 2 wurde die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten gezeigt, falls die rechte Seite f eine *einseitige* Lipschitzbedingung erfüllt. In Serie 1, Aufg. 1 wurde der Fall von reellwertigen Funktionen f betrachtet. Für komplexwertige Funktionen sagen wir, daß eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ die *einseitige Lipschitzbedingung* mit Konstante $L \in \mathbb{R}$ erfüllt, falls

$$\operatorname{Re}\langle f(t,y) - f(t,\widehat{y}), y - \widehat{y}\rangle \le L\|y - \widehat{y}\|_2^2 \qquad \forall (t,y), (t,\widehat{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n.$$

Genauso wie in Serie 1, Aufg. 1 kann man folgende Aussage zeigen: Ist f stetig, und erfüllen y, $\widehat{y}$ die Gleichungen $y' = f(t,y)$, $\widehat{y}' = f(t,\widehat{y})$ für $t \ge t_0$, so folgt

$$\|y(t) - \widehat{y}(t)\|_2 \le \|y(t_0) - \widehat{y}(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}, \qquad t \ge t_0. \tag{1}$$

6.1. Falls in (1) für die einseitige Lipschitzkonstante $L = 0$ gewählt werden kann, dann heißt die ODE *nicht-expansiv.* Ein RK-Verfahren heißt B-stabil, falls sich die Nicht-Expansivität ins Diskrete vererbt, d.h. für jeden Schritt $h \ge 0$ und Anfangsdaten y_0, $\widehat{y}_0$ gilt für die entsprechenden Werte y_1 und $\widehat{y}_1$ nach einem Schritt die Bedingung $\|y_1 - \widehat{y}_1\|_2 \le \|y_0 - \widehat{y}_0\|_2$. Zeigen Sie, daß B-stabile RK-Verfahren A-stabil sind.

6.2. (**schriftlich**) Man zeige, dass Gauß-Verfahren B-stabil sind.

Hinweis. Imitieren Sie den Beweis von Serie 1, Aufg. 2. und nutzen Sie, daß s-stufige Gauß-Verfahren Kollokationsverfahren (vgl. Serie 5, Aufg. 3) mit s Knoten sind (d.h. die c_i sind gerade die Gaußpunkte) und dass die induzierte Quadratur vom Exaktheitsgrad $2s - 1$ ist.

6.3. Betrachten Sie das klassische RK4-Verfahren für das System

$$\begin{aligned} y_1' &= -10y_1 + 9y_2 \\ y_2' &= 9y_1 - 10y_2 \end{aligned}$$

mit Anfangsdaten $[2;1]$. Geben Sie eine Gleichung an, aus der Sie die größte Schrittweite $h_{max} > 0$ bestimmen können, für die dieses System numerisch stabil gerechnet werden kann. Berechnen Sie mittels des Newtonverfahren h_{max}. Führen Sie auch das RK4-Verfahren auf $[0,5]$ durch mit Schrittweiten $h = T/N$, $N = 1, 2, \dots, 100$. Plotten Sie den Fehler (`loglog`) gegen h. Tragen Sie die von Ihnen berechnete kritische Schrittweite ein.

6.4. Gegeben sei ein implizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Daten $b, c \in \mathbb{R}^s$ und $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$. Anstatt in einem Schritt des Verfahrens den impliziten Stufenvektor $k \in \mathbb{R}^s$ exakt zu berechnen (als Limes der Fixpunktiteration), führen wir nur m Schritte der Fixpunktiteration durch. Mit dem Startwert $k^{(0)} := f(t_i, y_i)(1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^s$ erhalten wir also eine Approximation $\widetilde{k} := k^{(m)} \in \mathbb{R}^s$ von k. Dieses Vorgehen definiert das Einschrittverfahren

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j \widetilde{k}_j \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

Ist dieses Verfahren A-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

6.5. Geben Sie die Stabilitätsfunktion R des θ-Schemas an. Für welche θ ist das θ-Schema A-stabil? Für welche ist es L-stabil? *Hinweis:* es reicht, die Werte $z \in \mathbb{C}$ zu finden, für die $|R(z)| = 1$ ist.

6.6. Betrachten Sie ein s-stufiges Kollokationsverfahren (vgl. Serie 5, Aufg. 3). Definieren Sie das Polynom

$$M(x) = \frac{1}{s!}\prod_{i=1}^{s}(x - c_i).$$

Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, daß sich die Stabilitätsfunktion $z \mapsto R(z)$ für Kollokationsverfahren als $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ schreiben läßt, wobei die Polynome P, $Q \in \mathcal{P}_s$ wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} P(z) &= M^{(s)}(1) + M^{(s-1)}(1)z + \cdots + M(1)z^s && (2) \\ Q(z) &= M^{(s)}(0) + M^{(s-1)}(0)z + \cdots + M(0)z^s. && (3) \end{aligned}$$

a) Nehmen sie an, daß die Darstellung (2), (3) bereits gezeigt ist. Zeigen Sie, daß Gaußverfahren *nicht* L-stabil sein können.

b) Zeigen Sie die Darstellung (2), (3). *Hinweis:* Es reicht, den Fall $h = 1$, $y_0 = 1$ zu betrachten. Überlegen Sie sich, daß mit $z = \lambda h = \lambda$ das Kollokationspolynom $u \in \mathcal{P}_s$ aus Serie 5, Aufg. 3 die Bedingung

$$u'(x) - zu(x) = KM(x), \tag{4}$$

erfüllt, wobei $K \in \mathbb{C}$ eine von x unabhängige Konstante ist. Sie haben $R(z) = u(1)/u(0)$. Um $u(x)$ zu bestimmen, differenzieren Sie (4) s Mal, und kombinieren die erhaltenen Gleichungen linear.

6.7. **a)** Betrachten Sie für die autonome Differentialgleichungen $y' = f(y)$ das *linear implizite Eulerverfahren*: $y_{i+1} = y_i + hk_1$, wobei k_1 die Lösung von

$$k_1 = J \cdot (y_i + hk_1) + [f(y_i) - J \cdot y_i], \qquad J := \partial_y f(y_i).$$

Zeigen Sie, dass das linear implizite Eulerverfahren Konsistenzordnung 1 hat. Ist das Verfahren A-stabil? Wie lautet die Stabilitätsfunktion?

b) Überlegen Sie sich, daß jedes AWP $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ durch Übergang auf ein geeignetes System *autonomisiert* werden kann, d.h. die Lösung y kann durch Lösen eines autonomen Systems der Form $Y' = \mathcal{F}(Y)$ bestimmt werden. Geben Sie Y und $\mathcal{F}$ an sowie die Anfangsbedingungen für Y.