Serie 8

Abgabe: bis Fr., 7.5.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

8.1. (**schriftlich**) Sei m_C die Ordnung eines (impliziten) Adams-Moulton-Verfahrens mit k Schritten und m_P die Ordnung eines expliziten Verfahrens. Zeigen Sie, daß das Verfahren, welches durch $P(EC)^m$ beschrieben wird, die Konsistenzordnung $\min\{m_C, m_P+m\}$ hat. *Hinweis:* Sie können wieder annehmen, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und alle von Ihnen benötigten Ableitungen beschränkt sind.

8.2. (**Programmieraufgabe 8.2**) Man implementiere das Prädiktor-Korrektor-Verfahren $P(EC)^m$ für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor in Form einer MATLAB-Funktion

```
y = predcor(m,t,y0,y1,f)
```

Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit den Stützstellen, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}^d$ sind Spaltenvektoren mit den Startwerten und f ist ein *function handle* für die Funktion $f(t,y)$. Sie dürfen annehmen, daß die Schrittlänge konstant ist. Der Parameter m gibt die Anzahl der Korrektorschritte an. Der Ausgabewert ist eine Matrix $y \in \mathbb{R}^{d\times n}$, deren Spalten gerade die Approximationen zu den Zeitpunkten t sind. Schreiben Sie weiters eine MATLAB-Funktion `y1 = compute_y1(hh,N,t0,y0,f),` , die N Schritte des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittlänge hh und Startwerten $t0 \in \mathbb{R}$, $y0 \in \mathbb{R}^d$ macht. Schreiben Sie schließlich eine MATLAB-Funktion `compare_methods(nmax)`, welche 6 Konvergenzgraphen (Fehler gegen Schrittweite $h = 2^{-n}$, $n = 0, \ldots, nmax$) zeigt. Es werden folgende Kombinationen betrachten: $m \in \{1,2,3\}$ und $hh = h$ sowie $hh = h^2$. Es wird das AWP

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelöst mit Lösung $y(t) = (1,1)^\top e^t$. Der Fehler ist der Fehler bei $T = 1$. Erklären Sie das Verhalten der 6 Kurven. Diskutieren Sie die Kosten für die beiden Anlaufrechnungen im Vergleich zu dem Gesamtkosten des Verfahrens.

Das Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 ist gegeben durch

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right).$$

8.3. **a)** Für ein LMM bezeichnet $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \text{die NS von } \zeta \mapsto \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) \text{ erfüllen die Wurzelbedingung}\}$ das Stabilitätsgebiet. Definieren Sie die Funktion $\zeta \mapsto w(\zeta) := \rho(\zeta)/\sigma(\zeta)$. Zeigen Sie: $S \subset w(K_1(0))$, wobei $K_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{C}$ ist.

b) Zeigen Sie, daß für A-stabile LMM gilt:

$$\mathrm{Re}\, w(\zeta) \geq 0 \qquad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| > 1.$$

c) Zeigen Sie, daß explizite LMM nicht A-stabil sein können.

d) Die Adams-Moulton-Verfahren haben für $k \geq 2$ ein beschränktes Stabilitätsgebiet. Zeigen Sie eine (stark) vereinfachte Fassung dieses Resultates: Unter Verwendung der Tatsache, daß es ein $\zeta_k < -1$ gibt mit $\sigma(\zeta_k) = 0$, zeigen Sie, daß es ein $z_0 > 0$ gibt, so daß $(-\infty, -z_0)$ oder (z_0, ∞) nicht im Stabilitätsgebiet liegt.

8.4. **a)** Eine Funktion $\mathcal{I} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ heißt *Invariante/erstes Integral* der ODE $y' = f(y)$, wenn für jeden Startwert $y_0 \in \mathbb{R}^d$ gilt: $t \mapsto I(y_{0,y_0}(t))$ ist konstant. Zeigen Sie: I ist genau dann eine Invariante/erstes Integral der ODE, wenn

$$\nabla I(z) \cdot f(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

b) Sei $I \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ für ein $m > 1$. Geben Sie die zu (1) analoge Bedingung an die Funktion I an, damit I eine Invariante der ODE ist.

c) Zeigen Sie: für ein hamiltonsches System ist der Hamiltonian H eine Invariante.

8.5. Jedes RK-Verfahren erhält linearen Invarianten für ODEs der Form $y' = f(y)$.

8.6. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ und es existiere $L > 0$ mit $\|f(y)\| + \|Df(y)\| \leq L$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Mit $\Phi^t(y_0)$ bezeichnen wir die Lösung $y_{0,y_0}(t)$ des AWPs $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$.

a) Zeigen Sie: für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^d$ existiert $\Phi^t(y_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

b) Zeigen Sie: es gilt für alle t, $h \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} y_{h,y_0}(t+h) &= y_{0,y_0}(t) \\ y_{h,y_{0,y_0}(h)}(t) &= y_{0,y_0}(t). \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie: $\Phi^{t+h} = \Phi^t \circ \Phi^h = \Phi^h \circ \Phi^t$ auf $\mathbb{R}^d$. Schließen Sie $\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \mathrm{I}$ auf $\mathbb{R}^d$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\Phi^0 = \mathrm{I}$.

8.7. Schwächen Sie die Bedingungen an f aus Aufg. 8. 6 ab: Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$ für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie: für jedes Kompaktum $K \subset G$ existiert ein $h_0 > 0$ so daß für alle $|h| < h_0$ gilt:

$$(\Phi^h \circ \Phi^{-h})(y) = y \qquad \forall y \in K.$$