Serie 9

Abgabe: bis Fr., 14.5.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

9.1. (**Programmieraufgabe 9.1**) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[y, errs] = \texttt{simple\_shooting}(n, s)$$

welches das Randwertproblem

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \qquad y(0) = 4, \qquad y(1) = 1$$

mit dem einfachen Schießverfahren löst. Hierbei soll n die Anzahl Newtonschritte sein, und der Rückgabewert y soll der Funktionswert bei $t = 1/2$ sein. Der Parameter s ist der Startwert für das Newtonverfahren (d.h. eine erste Approximation an $y'(0)$). Der Vektor `errs` hat die Länge n und enthält die Fehler des Newtonverfahren. Genauer: $\texttt{errs}(i) = |y(1) - y_N^{(i)}| = |1 - y_N^{(i)}|$, wobei $y_N^{(i)}$ die Approximation an $y(1)$ ist, die im i-ten Newtonschritt erzielt wird. Verwenden Sie als Anfangswertproblemlöser die MATLAB-Routine `ode45`. *Hinweis:* Schreiben Sie wie in der Vorlesung die ODE zweiter Ordnung als ein System erster Ordnung. Formulieren Sie weiters ein System von ODEs, welches von y, y', $\partial_s y$, $\partial_s y'$ gemeinsam gelöst wird. Plotten Sie `errs` über der Anzahl Newtonschritte für die Eingabe $n = 10$ und $s = 1$.

9.2. Seien Ψ_1^h, Ψ_2^h zwei diskrete Evolutionen.

a) Zeigen Sie:

$$((\Psi_1^h)^\star)^\star = \Psi_1^h, \qquad (\Psi_1^h \circ \Psi_2^h)^\star = (\Psi_2^h)^\star \circ (\Psi_1^h)^\star$$

b) Zeigen Sie: $\Psi_1^h \circ (\Psi_1^h)^\star$ ist symmetrisch/reversibel.

9.3. Es soll gezeigt werden, daß ein s-stufiges RK-Verfahren reversibel/symmetrisch ist, wenn

$$a_{s+1-i,s+1-j} + a_{ij} = b_j \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,s\}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: $b_{s+1-j} = b_j$ für $j = 1,\dots,s$.

b) Betrachten Sie

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_0 &= \widetilde{y}_1 - h\sum_{i=1}^{s} b_i \widetilde{k}_i, \\ \widetilde{k}_i &= f(\widetilde{y}_1 - h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\widetilde{k}_j), \qquad j = 1,\dots,s. \end{aligned}$$

Seien weiters k_i die Stufen des RK-Verfahrens (Startwert y_0, $y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^s b_i k_i$). Zeigen Sie, daß $\widetilde{y}_0 = y_0$, $\widetilde{y}_1 = y_1$, $\widetilde{k}_i = k_{s+1-i}$ eine Lösung ist. Schließen Sie, daß RK-Verfahren mit (1) reversibel sind.

9.4. (**schriftlich**)

a) Zeigen Sie: die Gaußpunkte und Gaußgewichte sind symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt.

b) Zeigen Sie: Die Gaussverfahren sind symmetrisch. *Hinweis:* Gauß-Verfahren sind gerade die Kollokationsverfahren zu den Gaußpunkten; Aufg. 9.3

9.5. Zeigen Sie: kein explizites RK-Verfahren kann symmetrisch/reversibel sein. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß für die Stabilitätsfunktion R eines symmetrischen/reversiblen RK-Verfahrens gelten muß: $R(z)R(-z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ hinreichend nahe bei 0.

9.6. Zeigen Sie: erhält eine diskrete (konsistente) Evolution Ψ^h quadratische Invarianten, dann erhält auch die adjungierte Evolution $(\Psi^h)^\star$ quadratische Invarianten. Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, daß die Evolutionen Ψ^h und $(\Psi^h)^\star$ für alle $h \in \mathbb{R}$ und für alle $y \in \mathbb{R}^d$ definiert sind.

9.7. ("composition method") Sei $\Phi^h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die kontinuierliche Evolution und bezeichne Ψ^h eine diskrete Evolution (die wir der Einfachheit halber auch als Abbildung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ auffassen) mit Konsistenzordnung p. Nehmen Sie an, daß es eine C^1-Funktion $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$\Psi^h(y) - \Phi^h(y) = C(y)h^{p+1} + O(h^{p+2}), \qquad |h| \to 0.$$

Seien $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1 \\ \gamma_1^{p+1} + \gamma_2^{p+1} &= 0. \end{aligned}$$

Definieren Sie ein neues Verfahren $\widehat{\Psi}^h$ durch

$$\widehat{\Psi}^h(y) := \Psi^{\gamma_1 h} \circ \Psi^{\gamma_2 h}.$$

Zeigen Sie: das Verfahren hat (mindestens) die Ordnung $p+1$, d.h. zeigen Sie: $\widehat{\Psi}^h(y) - \Phi^h(y) = O(h^{p+2})$.