Serie 10

Abgabe: bis Fr., 21.5.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

10.1. Zeigen Sie, daß die beiden symplektischen Eulerverfahren

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - h\nabla_q H(p_{i+1}, q_i) && \text{(1a)} \\ q_{i+1} &= q_i + h\nabla_p H(p_{i+1}, q_i) && \text{(1b)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - h\nabla_q H(p_i, q_{i+1}) && \text{(2a)} \\ q_{i+1} &= q_i + h\nabla_p H(p_i, q_{i+1}) && \text{(2b)} \end{aligned}$$

symplektisch und von 1. Ordnung sind. Zeigen Sie weiters: Varianten (2) ist die adjungierte Methode von (1).

10.2. Das Störmer-Verlet-Verfahren ergibt sich durch Verkettung der beiden in Aufg. 10.1 vorgestellten symplektischen Eulerverfahren (genauer: es wird zuerst ein Schritt der Länge $h/2$ der Variante (1) und dann ein Schritt der Länge $h/2$ der Variante (2) gemacht). Zeigen Sie: Das Störmer-Verlet-Verfahren ist symplektisch, symmetrisch und von der Ordnung 2.

10.3. (**Programmieraufgabe 10.3**) Betrachten Sie das “Keplerproblem” bei dem $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ durch das folgende Hamiltonsche System beschrieben werden:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|_2^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|_2}.$$

Verwenden Sie folgende Anfangswerte:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{pmatrix} 1-e \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{pmatrix}, \qquad e = 0.6.$$

Programmieren Sie für dieses System 3 symplektische Verfahren, nämlich die beiden symplektischen Eulerverfahren (siehe Aufg. 1) sowie das Störmer-Verlet-Verfahren (siehe Aufg. 2). Die Eingabe für diese Verfahren soll die Anzahl N der Schritte, die Schrittweite h sowie die Startwerte $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$ sein. Die Rückgabe soll ein Vektor t mit den Zeitpunkten und Vektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ mit den Werten zu den Zeitpunkten t_i sein.

Schreiben Sie ein weiteres Programm, welches die Energieerhaltung der 3 symplektischen Verfahren testet. Machen Sie hierfür (zu den o.g. Startwerten) $2^n N_0$ Schritte der Schrittlänge $h_0 2^{-n}$, wobei $N_0 = 4000$ und $h_0 = 0.05$ und $n = 0, \ldots, 4$. Plotten Sie (doppelt logarithmisch) den Energiefehler über h. Was beobachten Sie? Erklären Sie.

10.4. (**schriftlich**) Betrachten Sie Splitting-Verfahren für $y' = f(y)$, d.h. seien Φ_1^t und Φ_2^t die Evolutionen für die ODEs $y' = f^{[1]}(y)$ und $y' = f^{[2]}(y)$.

a) Zeigen Sie: das Lie-Trotter-Verfahren $\Psi_{LT}^h := \Phi_1^h \circ \Phi_2^h$ hat Konsistenzordnung 1.

b) Zeigen Sie: $(\Psi_{LT}^h)^\star = \Phi_2^h \circ \Phi_1^h$

c) Definieren Sie das Strang-Splitting durch $\Psi_S^h := \Phi_1^{h/2} \circ \Phi_2^h \circ \Phi_1^{h/2}$. Zeigen Sie: das Verfahren hat Ordnung 2.

d) Seien die Evolutionen Φ_1^h, Φ_2^h symplektisch. Zeigen Sie: das Lie-Trotter-Splitting und das Strang-Splitting liefern symplektische Verfahren.

10.5. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2d\times 2d}$ heißt symplektisch, falls $A^\top JA = J$. Zeigen Sie: die Menge der symplektischen Matrizen bildet eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation. *Hinweis;* überlegen Sie sich, daß I symplektisch ist, daß das Produkt zweier symplektischer Matrizen symplektisch ist und daß eine symplektische Matrix ivertierbar sein muß.

10.6. Zeigen Sie: die Verkettung zweier symplektischer Abbildungen ist wieder symplektisch.

10.7. Wenn ein Schritt eines Einschrittverfahrens symplektisch ist, dann gilt für jedes k:

$$(D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k)^\top J(D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k) = J$$