Serie 11

Abgabe: bis Fr., 28.5.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

11.1. Betrachten Sie für glatte Koeffizienten a, b, c den Differentialoperator

$$Lu = -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u. \tag{1}$$

Auf Ω sei ein Gitter definiert mit Knoten $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$ für $h = 1/N$. Definieren Sie für Gitterfunktionen $u_h = (u_i)_{i=0}^N$ die Operatoren D_h^+, D_h^- durch

$$(D_h^+ u)_i := \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \qquad (D_h^- u)_i := \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

und die "symmetrische" Diskretisierung L_h durch

$$(L_h u_h)_i = -a(x_i)(D_h^- D_h^+ u_h)_i + b(x_i)\frac{1}{2}\left((D_h^+ u_h)_i + (D_h^- u_h)_i\right) + c(x_i)u_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

a) Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung Konsistenzordnung 2 hat. Genauer: Für $u \in C^4(\overline{\Omega})$ (und, wie in der VO $u^h := [u]_h$ definiert durch $(u^h)_i = u(x_i)$ für $i = 0, \ldots, N$) gilt

$$\max_{i=1,\ldots,N-1} |(L_h u^h)_i - (Lu)(x_i)| \le Ch^2. \tag{2}$$

b) Wie sieht die Abschätzung in (2) aus, wenn lediglich $u \in C^3(\overline{\Omega})$?

11.2. Betrachten Sie in Aufg 11.1 den Fall $c \equiv 0$.

a) Zeigen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*: Sei h so klein, daß

$$a(x_i) \pm \frac{1}{2}hb(x_i) > 0 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, N\}. \tag{3}$$

Dann gilt für alle Gitterfunktionen u_h:

$$(L_h u_h)_i \le 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N-1\} \qquad \Longrightarrow \qquad \max_{i=0,\ldots,N} u_i \le \max\{u_0, u_N\}.$$

b) Zeigen Sie die Existenz einer Gitterfunktion φ_h mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_h \ge 0, \qquad L_h \varphi_h \le -1, \qquad \|\varphi_h\|_\infty \le C \quad \text{für ein } C > 0 \text{ unabhängig von } h.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $e^{\lambda x}$ für geeignetes $\lambda > 0$.

11.3. (Fortsetzung von Aufg. 2)

a) Zeigen Sie unter der Voraussetzung (3), daß für ein $C > 0$ unabhängig von h für alle Gitterfunktionen u^h gilt:

$$\|u^h\|_\infty \le \max\{|u_0^h|, |u_N^h|\} + C\|L_h u^h\|_\infty$$

Schließen Sie, daß für jeden Vektor $f \in \mathbb{R}^{N-1}$ und alle u_{links}, $u_{rechts} \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem: finde $(u^h)_{i=0}^N$, so daß

$$(L_h u^h)_i = f_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \qquad u_0^h = u_{links}, \qquad u_N^h = u_{rechts}$$

eine eindeutige Lösung hat und zudem

$$\|u^h\|_\infty \le C \max\{|u_{links}|, |u_{rechts}|, \|f\|_\infty\}$$

gilt für ein $C > 0$ unabhängig von h.

b) Betrachten Sie das Randwertproblem: finde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so daß

$$Lu = f \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

für ein glattes $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, daß für die Diskretisierung aus Aufg. 11.1 die Fehlerabschätzung

$$\max_{i=0,\dots,N} |u(x_i) - u_i^h| \leq Ch^2$$

gilt. Welche Konvergenz liefern Ihre Abschätzungen, wenn $f \in C^1(\overline{\Omega})$?

11.4. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ist, wobei A_{11} und A_{22} nichttriviale quadratische Matrizen sind. A heißt *irreduzibel*, falls A nicht reduzibel ist. A hat die *Ketteneigenschaft*, falls, es zu jedem Paar $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ eine Folge $i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j$ gibt, so daß

$$A_{i_0,i_1},\ A_{i_1,i_2}, \dots, A_{i_{\ell-1},i_\ell} \neq 0. \tag{4}$$

Zeigen Sie: A irreduzibel $\Longleftrightarrow$ A hat die Ketteneigenschaft. *Hinweis:* zeigen Sie A reduzibel $\Longleftrightarrow$ A hat nicht die Ketteneigenschaft. Betrachten Sie für geeignete i die Menge $\mathcal{E}(i) := \{j \mid \exists \text{Kette } i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j \text{ mit } (4)\}$ der von i aus "erreichbaren" Indizes.

11.5. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *inversmonoton*, falls ($\leq$ ist bei Vektoren komponentenweise zu verstehen)

$$Ax \leq Ay \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq y.$$

Zeigen Sie: eine inversmonotone Matrix A ist invertierbar, und $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).