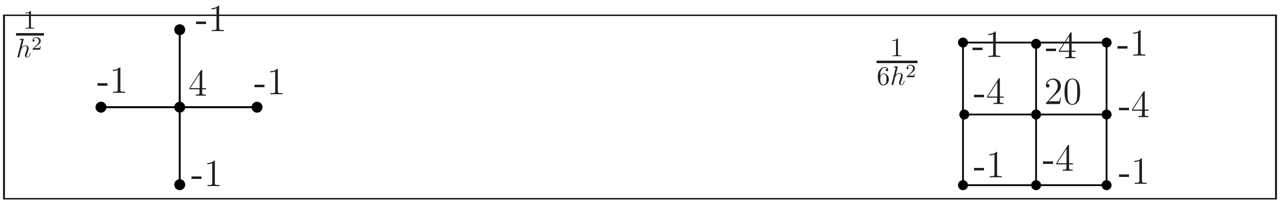

Abbildung 1: 5-Punkt (links) und 9-Punkt-Stern (rechts)

Übungen zu Numerik von Differentialgleichungen, LVA 106.065 **SS 2010**

Serie 12

Abgabe: bis Fr., 4.6.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

12.1. (**Programmieraufgabe 12.1**) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)^2$ das Problem

$$Lu := -\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1}$$

Das regelmäßige Gitter $\overline{\Omega}_h$ wird durch die Knoten $x_{ij} := (ih, jh)$, i, $j = 0, \dots, n+1$ mit $h = 1/(n+1)$ beschrieben. Der 5-Punkt-Stern und der 9-Punkt-Stern sind zwei Diskretisierungen von $-\Delta$, die Approximationen an $(-\Delta u)(x_{ij})$ für die inneren Knoten (d.h. $1 \le i, j \le n$) darstellen[1]:

$$(L_h^5 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{h^2}\left(4u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i-1,j} - u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j-1}\right),$$
$$(L_h^9 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{6h^2}\left(20u^h_{i,j} - 4u^h_{i+1,j} - 4u^h_{i-1,j} - 4u^h_{i,j+1} - 4u^h_{i,j-1} - u^h_{i-1,j-1} - u^h_{i-1,j+1} - u^h_{i+1,j-1} - u^h_{i+1,j+1}\right).$$

Diese Diskretisierungen werden kompakt wie in Fig. 1 dargestellt notiert. Als Gleichungssystem für die Approximationen u^h_{ij} in den inneren Knoten x_{ij} betrachten Sie 3 Fälle:

$$\begin{aligned}
(L_h^5 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \le i, j \le n,\\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \le i, j \le n,\\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{12}\left[8f(x_{ij}) + f(x_{i+1,j}) + f(x_{i-1,j}) + f(x_{i,j-1}) + f(x_{i,j+1})\right], \qquad 1 \le i, j \le n.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie 2 Matlabprogramme mit den Signaturen

$$A9 = \texttt{nine\_point\_stencil}(n) \qquad\qquad A5 = \texttt{five\_point\_stencil}(n),$$

welche die Matrizen $A9$ und $A5 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $N = n^2$ zurückgeben, die zu den Diskretisierungen L_h^5 und L_h^9 gehören. Verwenden `sparse`-Matrizen, d.h. legen Sie $A9$ und $A5$ mit `spalloc(N,N,9*N)` bzw. `spalloc(N,N,5*N)` an. Verwenden Sie für die Nummerierung der (inneren) Knoten die lexikographische Nummerierung, d.h. der Doppelindex (i,j) mit $1 \le i, j \le n$ hat die Nummer $\nu(i,j) = (i-1)n + j$. Sie dürfen annehmen, daß $n > 2$ ist.

Schreiben Sie weiters eine Routine mit der Signatur

$$[\texttt{u5}, \texttt{u9\_4}, \texttt{u9\_2}] = \texttt{poisson}(n, f)$$

wobei f ein *function handle* für eine Funktion $z = f(x,y)$ ist. Die Rückgabewerte sollten die Lösungsvektoren sein, die zu den 3 obigen Diskretisierungen gehören.

Wenden Sie `poisson` für $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ an (dann ist die exakte Lösung des Problems $u(x,y) = \sin(\pi x)\,\sin(\pi y)$) und Schrittweiten $h = 2^{-n}$, $n = 1, \dots, 7$. Plotten Sie für die drei Diskretisierungen den Fehler (doppelt logarithmisch) gegen h. Welche Konvergenzverhalten beobachten Sie?

12.2. Zeigen Sie, daß die Matrix $A9$ aus Aufg. 1 eine M-Matrix ist. Geben Sie eine explizite Abschätzung für $\|A9^{-1}\|_\infty$ an. *Hinweis:* Satz 6.10 ("M-Kriterium").

Sei u^h die Gitterfunktion, die durch Lösen von $L_h^9 u^h = B_h f^h$ entsteht, wobei $B_h f^h$ definiert ist als

$$(B_h f^h)(x_{ij}) = \frac{1}{12}\left(8f^h(x_{i,j}) + f^h(x_{i+1,j}) + f^h(x_{i-1,j}) + f^h(x_{i,j+1}) + f^h(x_{i,j-1})\right), \qquad 1 \le i, j \le n.$$

[1] der 5-Punkt-Stern ist der in VO diskutierte

Zeigen Sie, daß $\|[u]_h - u^h\|_\infty \leq Ch^4$, falls die gesuchte Lösung u hinreichend glatt ist. *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß man durch Taylorentwicklung nachrechnen kann, daß

$$\|L_h^9[u]_h - B_h([-\Delta u]_h)\|_\infty \leq Ch^4 \max_{|\alpha|=6} \|D^\alpha u\|_{C([0,1]^2)} \qquad \forall u \in C^6([0,1]^2).$$

12.3. (**schriftlich**) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definieren Sie die (offenen) *Gerschgorinkreise*

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| < r_i\}, \qquad r_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

a) Zeigen Sie: Das Spektrum $\sigma(A)$ ist im Abschluß der Vereinigung der Gerschgorinkreise enthalten:

$$\sigma(A) \subset \cup_{i=1}^n \mathrm{clo}(K_i); \qquad \mathrm{clo}(K_i) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| \leq r_i\}.$$

b) Zeigen Sie: falls A die Ketteneigenschaft hat (oder: A ist irreduzibel—siehe Aufg. 11.4) dann ist

$$\sigma(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n K_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^n \partial K_i\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $\lambda \in \sigma(A) \setminus \cup_{i=1}^n K_i$ und zeigen Sie, daß dann $\lambda \in \cap_{i=1}^n \partial K_i$. Hierzu sei oBdA ein zu λ gehöriger EV ξ zu $\|\xi\|_\infty = 1$ normiert. Dann gilt für jeden Index m mit $|\xi_m| = 1$, daß $\lambda \in \partial K_m$. Überlegen Sie sich, daß dann auch $|\xi_{m'}| = 1$ gilt für jeden Index m' mit $|A_{m,m'}| \neq 0$. Nutzen Sie dann die Ketteneigenschaft.

12.4. **a)** Zeigen Sie: für strikt diagonal dominante Matrizen A mit Diagonale D gilt für den Spektralradius von $I - D^{-1}A$, daß $\rho(I - D^{-1}A) < 1$.

b) A heißt irreduzibel diagonal dominant, wenn A irreduzibel ist und

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| \leq |A_{ii}| \qquad \forall i$$

und eine strikte Ungleichung für mindestens einen Index i gilt. Zeigen Sie: Es gilt $\rho(I-D^{-1}A) < 1$. *Hinweis:* verwenden Sie Aufg. 3 Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß D^{-1} existiert (dies könnte man aus der Irreduzibilität von A folgern).

12.5. Sei A eine L-Matrix (d.h. $A_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ und $A_{ii} > 0$ für alle i). Es gilt die Äquivalenz: A ist eine M-Matrix $\Longleftrightarrow \rho(I - D^{-1}A) < 1$. Zeigen Sie von dieser Äquivalenz die Richtung $\Longleftarrow$. Schließen Sie mit Aufg. 12.4, daß irreduzibel diagonal dominante Matrizen M-Matrizen sind.

In Aufg.12.2 wurde gezeigt, daß die Matrix A9 eine M-Matrix ist. Überlegen Sie sich einen alternativen Beweis, indem sich sich überlegen, daß A9 irreduzibel ist (d.h. die Ketteneigenschaft hat).

12.6. Betrachten Sie den allgemeinen 9-Punkt-Stern wie in Abb. 2 beschrieben zur Approximation von $-\Delta$. Der Konsistenzfehler $\tau(h)$ an der Stelle (x, y) ist dann definiert als

$$\begin{aligned}\tau(h,u) \quad := \quad & \Big| -(-\Delta u)(x,y) + \\ & \frac{1}{h^2}\Big(c_{0,0}u(x,y) + c_{-1,0}u(x-h,y) + c_{1,0}u(x+h,y) + \\ & c_{-1,-1}u(x-h,y-h) + c_{0,-1}u(x,y-h) + c_{1,-1}u(x+h,y-h) + \\ & c_{-1,1}u(x-h,y+h) + c_{0,1}u(x,y+h) + c_{1,1}u(x+h,y+h)\Big)\Big|\end{aligned}$$

Die durch den Stern beschriebene Diskretisierung heißt *konsistent* von der Ordnung p (bei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), falls es für jedes $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine Konstante $C > 0$ und ein $h_0 > 0$ gibt, so daß für alle $0 < h \leq h_0$ gilt: $\tau(h,u) \leq Ch^p$.

a) Sei $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Der Stern hat Konsistenzordnung p genau dann wenn $\tau(h,\pi) = 0$ für alle $\pi \in \mathcal{P}_{p+1}$ und alle $h > 0$.

b) Zeigen Sie: es gibt keinen 9-Punkt-Stern, der Konsistenzordnung $p \geq 3$ hat. *Hinweis:* betrachten Sie die Polynome $\pi_1 : (x,y) \mapsto x^2$ und $\pi_2 : (x,y) \mapsto x^4$.

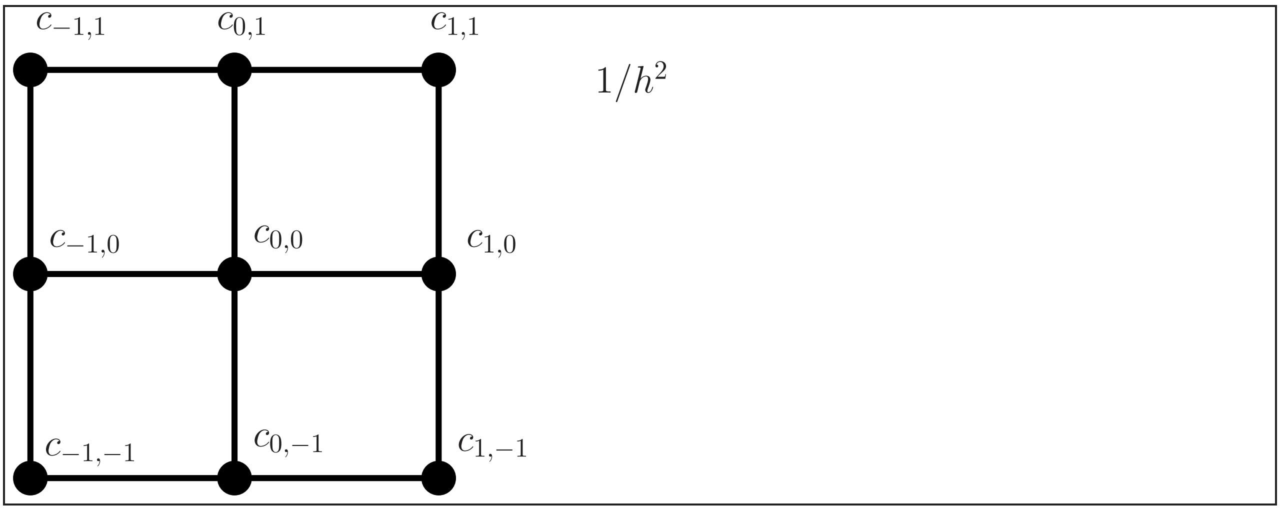

Abbildung 2: allg. 9-Punkt-Differenzenstern