Serie 13

Abgabe: bis Fr., 11.6.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

13.1. Sei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ ein beliebiges Gitter auf $\Omega = (0,1)$. Sei $h_i = x_{i+1} - x_i$ für $i = 0, \ldots, N-1$. Betrachten Sie die Diskretisierung von $-u'' = f$ auf $\Omega = (0,1)$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ durch

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0, \quad -\frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

Zeigen Sie: Einsetzen der Bedingungen $u_0 = 0$ und $u_N = 0$ führt auf ein LGS $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ für die Unbekannten $u_1, \ldots, u_{N-1}$, wobei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ eine M-Matrix ist.

13.2. (**Programmieraufgabe 13.2**) Es soll

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{auf } \Omega = (0,1)^2, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

mit einem Differenzenverfahren gelöst werden. Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[\texttt{sol}, \texttt{nr\_steps}] = \texttt{nonlinear\_solve}(\texttt{n}, \texttt{u0}, \texttt{tol}, \texttt{f}),$$

welches das Randwertproblem numerisch löst. Hier gibt wie in Programmieraufg. 12.1 der Parameter n die Anzahl Punkte pro Richtung an, `u0` ist der Startvektor für das Newtonverfahren, und `tol` ist die Toleranz für das Newtonverfahren. Schließlich ist f ein *function handle* für eine Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Verwenden Sie zur Diskretisierung von $-\Delta$ den 5-Punkt-Stern aus Programmieraufg. 12.1. Die Abbruchbedingung für das Newtonverfahren ist der Einfachheit halber so, daß die $\|\cdot\|_\infty$-Norm zweier aufeinanderfolgender Newtoniterierte $\leq$ `tol` ist. Der Rückgabevektor `sol` ist der Vektor der Knotenwerte, `nr_steps` gibt die Anzahl benötigter Newtonschritte an.
Welche Konvergenzrate beobachten Sie? *Zusatzaufgabe:* Wie kann ein Verfahren der Ordnung 4 erzeugt werden? *Hinweis:* Aufg. 12.2.

13.3. (**schriftlich**) Sei $u \in C^1_{st.w.}(-1,1)$, d.h. es gebe eine Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = 1$ derart, daß $u|_{(x_i,x_{i+1})} \in C^1([x_i, x_{i+1}])$ für $i = 0, \ldots, M-1$.

a) Zeigen Sie: ist zusätzlich $u \in C([-1,1])$, dann hat u eine schwache Ableitung, welche auf jedem Teilintervall mit der klassischen (punktweise definierten) Ableitung übereinstimmt.

b) Hat die Heavisidefunktion H gegeben durch $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$ eine schwache Ableitung? Ist die Bedingung $u \in C(\overline{\Omega})$ in Teilaufg. a) notwendig?

13.4. Betrachten Sie auf $\Omega = (0,1)$ die Funktion $u(x) = x^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in L^2(\Omega)$? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in H^1(\Omega)$?

13.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

a) Zeigen Sie: $H^1_0(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$. *Hinweis:* Sie dürfen die Aussage der VO verwenden, daß $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H^1(\Omega)$. Überlegen Sie sich, daß für jedes $\overline{x} \in \Omega$ die Abbildung $H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u \mapsto u(\overline{x})$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, daß $H^1(\Omega)$ vollständig ist. *Hinweis:* Sie dürfen die Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ verwenden.

c) Für $u \in H^1(\Omega)$ bezeichne die reelle Zahl $\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\,dy$ den Mittelwert von u über Ω. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C_\Omega > 0$, so daß für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) - u(y)\,dy$ für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

13.6. (Variationsungleichungen) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von Satz 7.1 der Vorlesung: Sei V Vektorraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform mit $a(u,u) \geq 0$ für alle $u \in V$. Sei $l : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform. Definiere

$$J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto J(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - l(u)$$

Sei $\mathcal{U} \subset V$ eine konvexe (nichtleere) Menge. Dann gilt: $u \in \mathcal{U}$ ist genau dann ein Minimierer von J, falls

$$a(u, v-u) \geq l(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}.$$

13.7. Analog zum 1D Fall gilt: eine (global) stetige Funktion, die stückweise glatt ist, ist in H^1. Zeigen Sie folgenden Spezialfall: Sei $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ und $\Omega_1 = (-1,0) \times (0,1)$ sowie $\Omega_2 = (0,1) \times (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\Omega_i} \in C^1(\overline{\Omega_i})$ für $i \in \{1,2\}$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$.