

## Serie 14

Abgabe: bis Fr., 18.6.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

**14.1. (Programmieraufgabe 14.1)** Schreiben Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[\mathbf{A}, \mathbf{l}] = \text{FEM1D}(x, f)$$

welches die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{A}$  und den Lastvektor  $\mathbf{l}$  für das Problem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

bestimmt. Sie können annehmen, daß der Vektor  $x = (x_0, \dots, x_N)$  geordnet ist (d.h.  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ ); es ist  $\Omega = (x_0, x_N)$ .  $f$  soll ein *function handle* auf eine Funktion sein. Die FEM-Diskretisierung soll mit den klassischen stückweise linearen Ansatzfunktionen realisiert werden. Approximieren Sie die Integrale auf dem Referenzelement, die bei der Bestimmung des Lastvektors auftreten, mit der Mittelpunktsregel. Verwenden Sie ein geeignetes *sparse* Format für die Matrix  $A$ . Sie dürfen voraussetzen, daß  $\text{length}(x) \geq 3$ .

Betrachten Sie  $\Omega = (0, 1)$  und  $f$  so, daß die exakte Lösung  $u(x) = \sin \pi x$  ist. Schreiben Sie ein Programm, welches für äquidistante Gitter der Gitterweite  $h_n = 2^{-n}$ ,  $n = 1, \dots, nmax$  (z.B.  $nmax = 10$ ) die FEM-Lösung bestimmt und dann (doppelt logarithmisch) folgende Fehler gegen die Gitterweite  $h$  plottet:

1. den maximalen Fehler in den Knoten des Gitters
2. den "Energiefehler"  $E - E_n$ . Hier ist die FEM-Energie  $E_n = a(u_N, u_N) = \mathbf{u}^T \mathbf{l}$  (siehe Aufg. 3 unten; hier sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{l}$  der Lösungsvektor und der Lastvektor, die zum Gitter der Gitterweite  $h_n$  gehören). Die "exakte Energie"  $E = a(u, u)$  bestimmen Sie durch Extrapolation der FEM-Energien  $E_n$ ,  $n = 1, \dots, nmax$  mittels des Aitkenschen  $\Delta^2$ -Verfahrens (siehe Numerik I; nehmen Sie für  $E$  den letzten Wert, den Sie mit dem Aitkenschen  $\Delta^2$ -Verfahren bestimmen können).

Welche Konvergenzraten beobachten Sie?

**14.2.** Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-u'' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Sei  $c \geq 0$  und  $c \in C(\overline{\Omega})$ . Eine *schwache* Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  ist definiert als die Lösung der Aufgabe:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d. } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei  $a(u, v) = \int_{\Omega} u'v' + c(x)uv$ .

- a) Zeigen Sie: ist  $f \in C(\overline{\Omega})$  und erfüllt eine schwache Lösung die Regularitätsvoraussetzung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , so ist  $u$  eine klassische Lösung.
- b) Die klassische FEM für das RWP (1) führt wieder auf ein LGS der Form  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{l}$ . Formulieren Sie den Algorithmus zum Aufstellen von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{l}$ . Zeigen Sie, daß  $\mathbf{A}$  SPD ist.

**14.3.** (Monotone Konvergenz der FEM in der Energie) Betrachten Sie  $a(u, v) = \int_{\Omega} u'v'$  auf  $H_0^1(\Omega)$ . Seien  $V_N \subset V_{N'} \subset H_0^1(\Omega)$  zwei Unterräume. Es gelte für  $u \in H_0^1(\Omega)$  und  $u_N \in V_N$ ,  $u_{N'} \in V_{N'}$ :

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in V_N, \quad a(u_{N'}, v) = l(v) \quad \forall v \in V_{N'}$$

a) Zeigen Sie:

$$a(u - u_{N'}, u - u_{N'}) = |u - u_{N'}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |u - u_N|_{H^1(\Omega)}^2 = a(u - u_N, u - u_N).$$

b) Zeigen Sie:

$$a(u, u) - a(u_N, u_N) = a(u - u_N, u - u_N).$$

c) Sei  $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, N\}$  eine Basis von  $V_N$  und  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$  die Steifigkeitsmatrix bzw. der Lastvektor. Zeigen Sie: für die FEM-Approximation  $u_N \in V_N$  gilt:  $a(u_N, u_N) = \mathbf{u}^T \mathbf{l}$ .

**14.4. (schriftlich)** (Aubin-Nitsche Trick) Sei wieder  $a(u, v) = \int_{\Omega} u' v'$ . Sei  $u_N \in S_0^1(\mathcal{T})$  die FEM-Approximation. Definieren Sie den Fehler  $e := u - u_N \in H_0^1(\Omega)$ . Ziel ist zu zeigen:

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|e\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2)$$

d.h. der Fehler gemessen in  $L^2$  ist eine  $h$ -Potenz besser als der Fehler gemessen in  $H^1$ .

a) Definieren Sie  $\psi$  als (klassische) Lösung von

$$-\psi'' = e \quad \text{auf } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Dann gilt:

$$a(v, \psi) = \int_{\Omega} ev \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \inf_{v \in S_0^1(\mathcal{T})} \|\psi - v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

b) Zeigen Sie die Abschätzung (2). *Hinweis:* Überlegen Sie sich, daß  $\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(e, \psi)$  gilt.

**14.5.** Sei  $\Omega = (0, 1)$  und  $a(u, v) = \int_{\Omega} u' v'$ . Sei  $V_N \subset H_0^1(\Omega)$  ein endlich-dimensionaler Teilraum. Die Abbildung  $R_N : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_N$ , die durch die Beziehung

$$a(R_N u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_N$$

heißt *Ritzprojektor*. Zeigen Sie:

a)  $R_N$  ist eine lineare Abbildung:  $R_N(u + \lambda v) = R_N u + \lambda R_N v$  für alle  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

b)  $R_N$  ist ein Projektor, d.h.  $R_N u = u$  für alle  $u \in V_N$

c) Es existiert  $C > 0$ , so daß  $\|R_N u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$  für alle  $u \in H_0^1(\Omega)$

d) Es existiert  $C > 0$ , so daß  $\|u - R_N u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$  für alle  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**14.6.** Sei  $\Omega \subset (0, L)^2 \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2L \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Schließen Sie:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + 4L^2} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$