Serie 15

Abgabe: bis Fr., 25.6.10, 12 Uhr bei Frau Kovalj

15.1. In Programmieraufgabe 14.1 wurde der Lastvektor nicht exakt ausgewertet, sondern durch numerische Quadratur approximiert. Es soll nun gezeigt werden, daß dieser "Fehler" nur einen weiteren Fehler $O(h)$ erzeugt. Sei $a(u,v) = \int_\Omega u'v'$ und sei für $f \in C^2(\overline{\Omega})$ die Linearform l definiert durch $l(v) = \int_\Omega fv$. Definiert man für ein Gitter $\mathcal{T}$ den Operator $I_0 : C(\overline{\Omega}) \to S^0(\mathcal{T}) := \{u \in L^2(\Omega) \,|\, u|_K = \text{konstant} \quad \forall K \in \mathcal{T}\}$ durch

$$(I_0 w)|_K := w(m_K), \qquad m_K = \text{Schwerpunkt von } K,$$

so erfüllen die "exakte" FEM Lösung $u_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ aus Aufg. 14.1 und die numerisch realisierte $\widetilde{u}_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ die Gleichungen

$$a(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in S^1_0(\mathcal{T}), \qquad a(\widetilde{u}_N, v) = \widetilde{l}(v) := \int_\Omega I_0(fv) \quad \forall v \in S^1_0(\mathcal{T}).$$

a) Zeigen Sie:

$$|u_N - \widetilde{u}_N|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \frac{|l(v) - \widetilde{l}(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}}.$$

b) Zeigen Sie: falls $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$ (mit $h_K = \operatorname{diam} K$), so ist

$$\sup_{v \in S^1_0(\mathcal{T})} \frac{|l(v) - \widetilde{l}(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}} \leq Ch^2 \sum_{j=1}^{2} \|f^{(j)}\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, daß für jedes $v \in S^1_0(\Omega)$ und $K \in \mathcal{T}$ gilt: $v|_K \in \mathcal{P}_1$.

15.2. (schriftlich) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega := (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

Die variationelle Formulierung ist damit:

$$\int_0^1 u'(y)v'(y)\,dy =: a(u,v) = l(v) := \int_0^1 f(y)v(y)\,dy \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Sei $\mathcal{T}$ ein beliebiges Gitter auf Ω mit Knoten x_i, $i = 0, \dots, N$.

a) Sei die "Greensche Funktion" G gegeben durch

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ (1-y)x & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie: für jedes $f \in C(\overline{\Omega})$ ist die Funktion

$$u(x) := \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy$$

eine variationelle Lösung von (1).

b) Zeigen Sie: für alle $x \in (0,1)$ und alle $v \in C^\infty_0(0,1)$ gilt:

$$a(v, G(x,\cdot)) = v(x). \tag{2}$$

Damit gilt wegen Dichtheit von $C^\infty_0(\Omega)$ in $H^1_0(\Omega)$ die Aussage (2) für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ (Beweis nicht nötig).

c) Zeigen Sie: die FEM-Approximation $u_N \in S^1_0(\mathcal{T})$ an die Lösung u von (1) ist gerade der stückweise lineare Interpolant der (gesuchten) exakten Lösung, d.h. $u(x_i) = u_N(x_i)$ für alle Knoten x_i des Gitters. *Hinweise:* überlegen Sie sich: Für jeden inneren Knoten x_i des Gitters ist die Funktion $G(\cdot, x_i) \in S^1_0(\mathcal{T})$.

15.3. (1D inverse Abschätzung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{T}$ ein Gitter auf Ω. Mit h_K, $K \in \mathcal{T}$, seien die Elementdurchmesser bezeichnet und $h_{min} = \min_{K\in\mathcal{T}} h_K$.

a) Sei $\widehat{K} := (-1,1)$ das Referenzelement. Zeigen Sie: Es gibt ein $C > 0$, so daß

$$\|w\|_{H^1(\widehat{K})} \le C\|w\|_{L^2(\widehat{K})} \qquad \forall w \in \mathcal{P}_1$$

b) Zeigen Sie:

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \le C\frac{1}{h_{min}}\|w\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall w \in S^1(\mathcal{T}).$$

Hinweis: Sei $F_K : \widehat{K} \to K$ die affine Elementabbildung. Überlegen Sie sich, in welcher Beziehung $\|\widehat{w}'\|_{L^2(\widehat{K})}$ und $\|w'\|_{L^2(K)}$ bzw. $\|\widehat{w}\|_{L^2(\widehat{K})}$ und $\|w\|_{L^2(K)}$ zu einander stehen, falls $\widehat{w} := w \circ F_K$.

15.4. Seien $\mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ beide SPD. Definieren Sie zwei Skalarprodukte $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{A}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{M}}$ auf $\mathbb{R}^N$ durch $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{A}} := \mathbf{u}^\top\mathbf{A}\mathbf{v}$ und $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{M}} := \mathbf{u}^\top\mathbf{M}\mathbf{v}$. Zeigen Sie: Es existieren Eigenpaare $(\mathbf{v}_i,\lambda_i) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, $i = 1,\ldots,N$ des verallgemeinerten EWP

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{v}_i$$

mit der Eigenschaft

$$\langle v_i, v_j\rangle_{\mathbf{M}} = \delta_{ij}, \qquad \langle v_i, v_j\rangle_{\mathbf{A}} = \lambda_i\delta_{ij}.$$

Insbesondere bilden die $\mathbf{v}_i$ damit eine Basis des $\mathbb{R}^N$. *Hinweis:* EWP $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

15.5. (**Programmieraufgabe 15.5**) Sei $\Omega = (0,1)$. Programmieren das explizite und das implizite Eulerverfahren für

$$u_t - u'' = f \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad u(0) = u(1) = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

auf regelmäßigen Gittern mit Schrittweite h. Sie dürfen weiters annehmen, daß die Zeitschrittweite k konstant ist.

Gehen Sie hierzu wie folgt vor: modifizieren Sie Ihren Code `FEM_1D` aus Aufg. 14.1 so, daß Sie zu gegebenem $N \in \mathbb{N}$ (d.h. $h = 1/N$) die Steifigkeitsmatrix A und die Massematrix M erhalten. Weiters benötigen Sie eine Routine, die zu gegebenem t den Lastvektor $\mathbf{F}$ mit Einträgen $\mathbf{F}_i := \int_\Omega f(x,t)\varphi_i(x)\,dx$ bestimmt. Verwenden Sie genau wie in Aufg. 14.1 eine 1-Punkt-Quadraturformel. Die Approximation $u_{0,N}$ an die Startwerte ist schließlich einfach der stückweise lineare Interpolant von u_0.

Betrachten Sie den Fall der exakten Lösung $u(x,t) = e^{-t}x(1-x)$ (d.h. $f(x,t) = e^{-t}(2 - x(1-x))$ und $u_0(x) = x(1-x)$). Betrachten Sie die Wahlen $N = 2^{-n}$, $n = 2,\ldots,7$. Die Zeitschrittweite k und die Anzahl Zeitschritte K soll so gewählt werden:

1. $k = 0.2h$ und $K = \frac{T}{k}$ für das implizite Eulerverfahren
2. $k = \frac{1.999}{\lambda_{max}}$ und $K = \lceil\frac{T}{k}\rceil$ für das explizite Eulerverfahren, wobei λ_{max} der maximale Eigenwert des EWP $\mathbf{A}x = \lambda\mathbf{M}x$ ist (*Hinweis:* `help eigs`)
3. $k = \frac{2.001}{\lambda_{max}}$ und $K = \lceil\frac{T}{k}\rceil$ für das explizite Eulerverfahren, wobei λ_{max} wie oben der maximale Eigenwert des EWP $\mathbf{A}x = \lambda\mathbf{M}x$ ist (*Hinweis:* `help eigs`)

Plotten Sie (doppelt logarithmisch) in allen drei Fällen den maximalen nodalen Fehler für $T = 1$ gegen h. Was beobachten Sie? Plotten Sie ebenfalls die benötigte Rechenzeit gegen h. Was beobachten Sie? Die benötigte Rechenzeit sollte sich in den 3 Fällen wie $O(h^{-\alpha})$ verhalten. Was ist α in den 3 Fällen? Plotten Sie ebenfalls (doppelt logarithmisch) die erzielte Genauigkeit gegen die benötigte Rechenzeit für die 3 Fälle.

15.6. Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Vorab zur Begriffsbildung: Für eine Funktion $f : \Omega \to Y$ (Y Hilbertraum) und $t \in \Omega$ bezeichnet $f'(t) := \lim_{h\to 0} h^{-1}(f(t+h) - f(t))$ die Ableitung von f (natürlich nur sofern der Limes in Y existiert). Falls f stetig ist und f' für jedes $t \in \Omega$ existiert und falls die Funktion $f' : \Omega \to Y$ stetig ist, schreiben wir $f \in C^1(\Omega, Y)$.

Für den Hilbertraum $X = L^2(\Omega)$ oder $X = H^1_0(\Omega)$ kann eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in kanonischer Weise[1] als Funktionen $f : \mathbb{R} \to X$ betrachtet werden mittels der Interpretation als $t \mapsto f(\cdot,t)$.

a) für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $(x,t) \mapsto e^t x^\alpha(1-x)$ in $C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$?

b) Ist die Funktion $(x,t) \mapsto \frac{\sqrt{t}}{x+t}$ ein Element von $C([0,1]; L^2(\Omega))$?

[1] man verwendet das gleiche Symbol "f", obwohl strikt genommen zwei verschiedene Funktionen vorliegen