Serie 1

Abgabe: bis Fr., , 12 Uhr im 4. Stock

1.1. **a)** Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Die Funktion f erfülle eine *einseitige Lipschitzbedingung* mit Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\langle f(t,y) - f(t,z), y - z\rangle_2 \leq L\langle y - z, y - z\rangle_2 \qquad \forall (t,y), (t,z) \in G.$$

Zeigen Sie folgende Aussage über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $[t_0, T] \subset J$ und seien y, $z \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ Lösung der Differentialgleichung, d.h.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{und} \qquad z'(t) = f(t, z(t)) \qquad \forall t \in J.$$

Dann gilt für alle $t \in [t_0, T]$:

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq \|y(t_0) - z(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $m(t) = \|y(t) - z(t)\|_2^2$; studieren Sie den Beweis des Gronwall-Lemmas.

b) Schließen Sie, daß für Funktionen f, die eine einseitige Lipschitzbedingung erfüllen, die Fortsetzung nach rechts eindeutig ist.

1.2. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t), \qquad y(0) = g(0) + \delta, \tag{1}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ beschränkt und $\delta \in \mathbb{R}$ sei.

a) Lösen Sie (1).

b) Diskutieren Sie die Wirkung der Störung δ für die drei Fälle $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$.

c) Visualisieren Sie die Lösung für $\delta = 0$ und $\delta = 10^{-2}$ mit $g(t) = \arctan t$ bzw. $g(t) = e^{-t^2}$.

1.3. Gegeben sei auf $G = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(t,y) = \sqrt{|1 - y^2|}.$$

Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung(en) des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y), \qquad y(0) = 0.$$

1.4. Sei $\mathbf{A} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine glatte, $\mathbb{R}^{n\times n}$-wertige Funktion. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Seien $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ Funktionen, die die homogenene ODE $y' = \mathbf{A}(t)y$ lösen und zudem bei $t = t_0$ linear unabhängig sind. Definieren Sie die matrixwertige Funktion $W \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ durch $W(t) := (y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t))$.

a) Zeigen Sie: $W'(t) = A(t)W(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und die Matrix W ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ invertierbar.

b) Zeigen Sie: für jeden Startwert $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ist die Lösung $y(t) = y_{t_0,y^{(0)}}(t)$ des AWP $y' = A(t)y$ mit $y(t_0) = y^{(0)}$ gegeben durch $y(t) = W(t)(W(t_0))^{-1}y^{(0)}$.

c) Geben Sie mithilfe von W für $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine Formel an für die Lösung des AWP

$$y' = A(t)y + f(t), \qquad y(t_0) = y^{(0)}.$$

Hinweis: Machen Sie für y den Ansatz $y(t) = W(t)c(t)$ und bestimmen Sie die Funktion c.