Serie 4

Abgabe: bis Fr., 25.3.11, 12 Uhr im 4. Stock

4.1. (**schriftlich**) Im Konvergenzsatz Satz 2.10 wurde die Lipschitzstetigkeit der Inkrementfunktion Φ benötigt. Zeigen Sie, daß diese Voraussetzung für explizite s-stufige RK-Verfahren erfüllt ist. Nehmen Sie hierzu an, daß $f \in C(\mathbb{R}^2)$ eine (globale) Lipschitzbedingung im 2. Argument mit Lipschitzkonstante $L > 0$ erfüllt. Zeigen Sie nun, daß dann die Inkrementfunktion Φ eine Lipschitzbedingung mit Konstante L_Φ erfüllt, wobei

$$L_\Phi \leq L \sum_{i=1}^{s} |b_i|(1+\eta)^i, \qquad \text{wobei} \qquad \eta = Lh \max_{i=1,\dots,s} \sum_{j=0}^{i-1} |a_{ij}|.$$

Im Wesentlichen vererbt sich also die Lipschitzkonstante von f auf die Inkrementfunktion Φ. *Hinweis:* Betrachten Sie die Differenz $k_i - \widehat{k}_i$, wobei k_i und $\widehat{k}_i$ die Stufen für Daten y, $\widehat{y}$ bezeichnen.

4.2. Ziel ist, eine Vorstellung der Beziehung zwischen der Toleranz τ_0 und der Anzahl Schritte von adaptiven Einschrittverfahren mit "*error per unit step*" zu entwickeln.

a) Zeigen Sie für den Konsistenzfehler des expliziten Eulerverfahrens

$$|\tau(\widetilde{t}, \widetilde{y}, h)| \leq h \|y''_{\widetilde{t},\widetilde{y}}\|_{L^1([\widetilde{t},\widetilde{t}+h])},$$

wobei $\|g\|_{L^1(I)} = \int_I |g(t)|\,dt$ bezeichnet.

b) Betrachten Sie den "Modellalgorithmus" Alg. 2.21 der VO für das explizite Eulerverfahren. Nehmen Sie vereinfachend an, daß für den Konsistenzfehler die Beziehung $\tau(\widetilde{t}, h) = h\|y''_{ex}\|_{L^1([\widetilde{t},\widetilde{t}+h])}$ gilt, wobei y_{ex} die gesuchte Lösung des AWP ist. Zeigen Sie, daß dann für den Modellalgorithmus Alg. 2.21 für die Anzahl N der benötigten Schritte gilt:

$$N = \sum_{i=0}^{N-1} 1 \leq \|y''_{ex}\|_{L^1([t_0,T])}\ \tau_0^{-1}.$$

c) Betrachten Sie ein Verfahren der Ordnung p und nehmen Sie analog zu Teilaufg. b) an, daß der Konsistenzfehler die Beziehung $\tau(\widetilde{t}, h) = C_\tau h^p \|y^{(p+1)}_{ex}\|_{L^1([\widetilde{t},\widetilde{t}+h])}$ erfüllt. Zeigen Sie, daß für eine geeignete Konstante $C > 0$ gilt:

$$N = \sum_{i=0}^{N-1} 1 \leq C\|y^{(p+1)}_{ex}\|^{1/p}_{L^1([t_0,T])}\ \tau_0^{-1/p}.$$

Hinweis: wie Teilaufg. b). Zusätzlich Höldersche Ungleichung für Summen.

4.3. (**Programmieraufgabe 4.3**)

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, wie der Schrittweitenvorschlag zu wählen ist, wenn der adaptive Algorithmus auf dem *error per unit step*-Kriterium basiert. Geben Sie die Schrittweitenvorschläge an, die entstehen, wenn die Schrittweiten nach dem *error per step* Kriterium gewählt werden sollen. Betrachten Sie den Fall eines Verfahrens der Ordnung p.

b) Welche Genauigkeit zum Endzeitpunkt T erwarten Sie, wenn Sie ein auf dem *error per step*-Kriterium basierenden Algorithmus mit Toleranz `tol` verwenden?

c) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur

```
[t,y,Fevals,rejects]=rk4adaptiveEpS(f,y0,a,b,tol),
```

die einen adaptiven Algorithmus basierend auf dem RK4-Verfahren und dem *error per step*-Kriterium realiert. Modifizieren Sie hierzu das Codestück `rk4adaptive`, welches sich auf der VO-Homepage befindet.

d) Vergleichen Sie `rk4adaptive` (siehe Homepage der VO) und `rk4adaptiveEpS` für die Auswertung von $y(1)$, wobei die Lösung $y(t) = 1/(1 + 100t^2)$ das Anfangswertproblem $y' = -200ty^2$ mit $y(0) = 1$ löst. Vergleichen Sie hierzu insbesondere die Verfahren hinsichtlich "Fehler gegen vorgegebene Toleranz" und "Fehler gegen Anzahl Funktionsauswertungen" (Plotten Sie in beiden Fällen doppelt logarithmisch).

4.4. Bezeichne $S_\Delta(f)$ den Wert der summierten Simpsonregel auf dem Gitter Δ zur Approximation von $\int_0^1 f(t)\,dt$. Sei $f(t) = 11/10t^\alpha$ mit $\alpha = 1/10$. Sei für $\beta > 1$ das Gitter $\Delta_N^\beta = (t_0, \ldots, t_N)$ gegeben durch $t_i = (i/N)^\beta$, $i = 0, \ldots, N$. Ziel der Aufgabe ist es, folgende Quadraturfehlerabschätzung zu zeigen:

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_{\Delta_N^\beta}(f) \right| \leq C \begin{cases} N^{-4} & \text{falls } (1+\alpha)\beta > 4 \\ N^{-4} \ln N & \text{falls } (1+\alpha)\beta = 4 \\ N^{-(1+\alpha)\beta} & \text{falls } (1+\alpha)\beta < 4. \end{cases} \tag{1}$$

a) Für $z \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma(N) = \sum_{i=1}^N i^z$. Zeigen Sie, daß es Konstanten $C_{1,z}$, $C_{2,z}$, $C_{3,z}$ gibt (die nicht von N abhängen), so daß für $\Sigma(N)$ folgende Abschätzungen gelten:

$z > -1$	$z = -1$	$z < -1$
$\Sigma(N) \leq C_{1,z} N^{z+1}$	$\Sigma(N) \leq C_{2,z} \ln N$	$\Sigma(N) \leq C_{3,z}$

b) Zeigen Sie, daß für $h_j = t_{j+1} - t_j$ gilt: $h_j \leq C N^{-1} t_j^{1-1/\beta}$ ($j \geq 1$, $C > 0$ geeignet). Für das Element $I_0 = [t_0, t_1] = [0, t_1]$ gilt trivialerweise $h_0 = t_1$.

c) In der VO Numerik wurde eine Fehlerabschätzung für die summierte Simpsonregel gezeigt. Verwenden Sie diese, um für den Fehler zu zeigen:

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_{\Delta_N^\beta}(f) \right| \leq C h_0^{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{N-1} h_i^5 x_i^{\alpha-4}.$$

Schließen Sie hieraus, daß die gewünschte Abschätzung (1) gilt.

4.5. Betrachten Sie das AWP $y' = f(t,y)$, $y(0) = 0$ mit $f(t,y) = (11/10)\,t^{1/10}$.

a) Zeigen Sie: für jedes Gitter $\Delta = (t_0, \ldots, t_N)$ mit $t_0 = 0$ und $t_N = 1$ liefert das RK4-Verfahren gerade den Wert der summierten Simpsonregel (mit diesem Gitter) für $\int_0^1 \frac{11}{10} t^{1/10}\,dt$.

b) Welches Konvergenzverhalten (Fehler gegen N) erwarten Sie mit den graduierten Gittern Δ_N^β aus Aufg. 4.4?

c) Programmieren Sie das RK4-Verfahren auf den Gittern Δ_N^β aus Aufg. 4.4 für (i) $\beta = 1$ (d.h. uniforme Gitter), (ii) $\beta = 3$, (iii) $\beta = 4/1.1$, (iv) $\beta = 5$, sowie (vi) mittels des adaptiven Algorithmus `rk4adaptive` aus Aufg. 4.3 (Toleranzen 10^{-n}, $n = 1, \ldots, 10$). Plotten Sie (doppelt logarithmisch) für alle Fälle den Fehler gegen die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen. Diskutieren das Verhalten der Verfahren anhand Ihrer Plots. Falls man die Gitter Δ_N^β aus Aufg. 4.4 verwendet, sollte man Ihrer Meinung nach β lieber zu groß oder zu klein wählen? Ist ein adaptives Verfahren besser als die "richtige" Wahl von β?

4.6. Es soll das Verhalten des adaptiven Algorithmus `rk4adaptive` (siehe Aufg. 4.3) für Quadraturprobleme mit stückweise glatten f analysiert werden. Als Modell betrachten wir $f(t,y) \mapsto (t,y)$ von der Form

$$f(t,y) = \begin{cases} f_1(t) & t < t_* \\ f_2(t) & t \geq t_* \end{cases}$$

wobei f_1, f_2 glatt sind, aber f bei $t = t_*$ einen Sprung hat.

a) Verwenden Sie den adaptiven Algoritmus `rk4adaptive` aus Aufg. 4.5 mit $h_{min} = 0$ für von Ihnen gewählte Funktionen f_1, f_2, wobei $t_* \in (t_0, T)$. Was beobachten Sie?

b) Versuchen Sie, die Beobachtung aus Teilaufg. a) zu erklären. Betrachten Sie hierzu vereinfachend den Fall, daß f_1 und f_2 konstante Funktionen sind. Geben Sie den Konsistenzfehler $\tau(t,y,h)$ an. Tun Sie nun so, als ob Ihr Algorithmus den Konsistenzfehler nicht schätzt, sondern exakt zur Verfügung hat.

c) Betrachten Sie nun den Fall $h_{min} > 0$ und f wie in Teilaufg. a). Welchen Fehler (in Abhängigkeit von h_{min} und `tol`) zum Endzeitpunkt T erwarten Sie für Ihren Algorithmus `rk4adaptive`? Wie soll man also h_{min} sinnvoll wählen?

4.7. Zeigen Sie: ein Einschrittverfahren mit der folgenden Inkrementfunktion kann *nicht* Ordnung 3 haben:

$$\Phi(t,y,h,f) = b_1 f(t,y) + b_2 f(t + c_2 h, y + a_{21} h f(t,y)).$$