Serie 5

Abgabe: bis Fr., 1.4.11, 12 Uhr im 4. Stock

5.1. (**schriftlich**)

a) Zeigen Sie, daß für ein (implizites oder explizites) RK-Verfahren der Konsistenzordnung $p \geq 1$ gilt: angewandt auf rechte Seiten $f(t, y) = \pi(t)$ mit $\pi \in \mathcal{P}_{p-1}$ ist das Verfahren exakt. *Hinweis:* der Konsistenzfehler $h \mapsto \tau(t_0, y_0, h)$ ist ein Polynom.

b) Zeigen Sie, daß für ein s-stufiges (implizites oder explizites) Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p die Abschätzung $p \leq 2s$ erfüllen muß.
Bemerkung: Gaußverfahren realisieren also die maximal erreichbar Konsistenzordnung.

5.2. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine diagonalisierbare Matrix und betrachten Sie das System von Differentialgleichungen

$$\underline{y}' = \mathbf{B}\underline{y}.$$

Zeigen Sie, daß die Anwendung eines RK-Verfahrens auf dieses System äquivalent zur Anwendung desselben RK-Verfahrens auf das Problem in der diagonalisierten Form. Zeigen Sie, daß das RK-Verfahren in der diagonalisierten Form gerade die *komponentenweise* Anwendung der RK-Verfahrens ist, d.h. ein entkoppeltes System der Form

$$\tilde{y}_i' = \lambda_i \tilde{y}_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

ist, wobei die $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $\mathbf{B}$ sind.

5.3. **(Kollokationsverfahren)** Seien $c_1, \ldots, c_s \in [0, 1]$ paarweise verschiedene Stützstellen. Wir definieren das *Kollokationsverfahren* wie folgt: Sei $u \in \mathcal{P}_s$ das Polynom vom Grad s, welches die Kollokationsbedingungen

$$\begin{aligned} u(t_0) &= y_0, \\ u'(t_0 + c_i h) &= f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)), \qquad i = 1, \ldots, s, \end{aligned}$$

erfüllt. Ein Schritt des Einschrittverfahrens ist dann gegeben durch

$$y_1 = u(t_0 + h).$$

a) Zeigen Sie, daß das Kollokationsverfahren ein (implizites) RK-Verfahren ist, wobei

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(t)\, dt, \qquad b_j = \int_0^1 l_j(t)\, dt$$

und

$$l_j(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} \frac{t - c_i}{c_j - c_i}$$

Hinweis: Schreiben Sie $u'(t) = \sum_{j=1}^{s} k_j l_j(t)$.

b) Zeigen Sie: Die Koeffizienten a_{ij} und b_i eines Kollokationsverfahrens erfüllen

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \qquad k = 1, \ldots, s. \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \qquad i, k = 1, \ldots, s. \tag{3}$$

5.4. (Kollokationsverfahren—Fortsetzung) Betrachten Sie ein Kollokationsverfahren wie in Aufg. 5.3 gegeben. Zeigen Sie: Ein Kollokationsverfahren mit s Stufen liefert ein Verfahren der Ordnung (mindestens) s. Genauer: Auf dem Intervall $[t_0, t_0 + h]$ liefert die Approximation u aus Aufg. 5.3, a) eine Approximation an die exakte Lösung y_{t_0,y_0} mit

$$\|y_{t_0,y_0} - u\|_{C([t_0,t_0+h])} \leq Ch^{s+1}.$$

Hinweis: Es gilt $y(t) - u(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau) - u'(\tau)\, d\tau$. Schieben Sie ein Interpolationspolynom von y'_{t_0,y_0} ein. Versuchen Sie, ein Abschätzung der Form $\|y_{t_0,y_0} - u\|_{C([t_0,t_0+h])} \leq h \max_{j=1,\ldots,s} |(y'_{t_0,y_0} - u')(t_0 + c_j h)| + \cdots$ mittels einer geeigneten interpolatorischen Quadraturformel zu erhalten. Schließen Sie mittels der von y_{t_0,y_0} und u erfüllten Gleichungen auf das gewünschte Resultat für h hinreichend klein. Sie können $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und Beschränktheit aller von Ihnen benötigten Ableitungen annehmen.

Bemerkung: Die Gauß- und Radau-Verfahren sind spezielle Kollokationsverfahren, bei denen die c_j als die Gaußpunkte (bzw. die Radaupunkte) gewählt werden. Diese Verfahren liefern Verfahren, die sogar die Ordnung $2s$ bzw. $2s - 1$ haben.

5.5. (Kollokationsverfahren—Fortsetzung II) Betrachten Sie nun ein Kollokationsverfahren, bei dem $c_s = 1$. Zeigen Sie: Die letzte Zeile von $\mathbf{A}$ stimmt mit $\mathbf{b}^\top$ überein. Zeigen Sie weiter: Ist $c_1 c_2 \cdots c_s \neq 0$, so ist $\mathbf{A}$ invertierbar. *Hinweis:* Die c_i sind paarweise verschieden; erkennen Sie, daß (3) Ihnen das Bild von s Vektoren unter der Anwendung von $\mathbf{A}$ liefert.

5.6. (**Programmieraufgabe 5.6**) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[\texttt{y}, \texttt{iter}] = \texttt{IRK}(\texttt{f}, \texttt{fy}, \texttt{t0}, \texttt{y0}, \texttt{h}, \texttt{A}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{tol}),$$

welches einen Schritt der Länge h von eines impliziten RK-Verfahrens macht. Dabei sind b, c Spaltenvektoren und A eine Matrix, die zusammen das Butcherschema des IRK beschreiben. Die Gleichung für die Stufen soll mit dem Newtonverfahren bestimmt werden, wobei die Abbruchbedingung (der Einfachheit halber) ist, daß die 2-Norm der Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterierten $\leq$ `tol` ist. `f` und `fy` sollen *function handles* sein für die skalaren Funktionen $(t, y) \mapsto f(t, y)$ und $(t, y) \mapsto f_y(t, y)$. Die Ausgabevariable `iter` soll die Anzahl benötigter Newtonschritte sein.

Testen Sie Ihr Programm mit dem 2-stufigen Gaußverfahren gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Plotten Sie für $f(t, y) = \lambda y$, $y_0 = 1$, die Konvergenz "Anzahl Schritte N gegen Fehler bei $T = 1$" bei uniformer Schrittweite. Für $\lambda = -25$ geben Sie auch die maximale Anzahl Newtonschritte an, die Sie in einem Schritt Ihres IRK benötigt haben. Erklären Sie, warum diese Anzahl Newtonschritte benötigt wurde.

b) Was könnte eine sinnvolle Wahl des Parameters `tol` im Fall von IRK-Verfahren der Konsistenordnung p sein?