

Serie 6

Abgabe: bis Fr., 11.4.11, 12 Uhr im 4. Stock

In Serie 1, Aufg. 1 wurde die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten gezeigt, falls die rechte Seite f eine *einseitige* Lipschitzbedingung erfüllt. In Serie 1, Aufg. 1 wurde der Fall von reellwertigen Funktionen f betrachtet. Für komplexwertige Funktionen sagen wir, daß eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ die *einseitige Lipschitzbedingung* mit Konstante $L \in \mathbb{R}$ erfüllt, falls

$$\operatorname{Re} \langle f(t, y) - f(t, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle \leq L \|y - \hat{y}\|_2^2 \quad \forall (t, y), (t, \hat{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n.$$

Genauso wie in Serie 1, Aufg. 1 kann man folgende Aussage zeigen: Ist f stetig, und erfüllen y, \hat{y} die Gleichungen $y' = f(t, y), \hat{y}' = f(t, \hat{y})$ für $t \geq t_0$, so folgt

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\|_2 \leq \|y(t_0) - \hat{y}(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

6.1. Falls in (1) für die einseitige Lipschitzkonstante $L = 0$ gewählt werden kann, dann heißt die ODE *nicht-expansiv*. Ein RK-Verfahren heißt B-stabil, falls sich die Nicht-Expansivität ins Diskrete vererbt, d.h. für jeden Schritt $h \geq 0$ und Anfangsdaten y_0, \hat{y}_0 gilt für die entsprechenden Werte y_1 und \hat{y}_1 nach einem Schritt die Bedingung $\|y_1 - \hat{y}_1\|_2 \leq \|y_0 - \hat{y}_0\|_2$. Zeigen Sie, daß B-stabile RK-Verfahren A-stabil sind.

6.2. (schriftlich) Man zeige, dass Gauß-Verfahren B-stabil sind.

Hinweis. Imitieren Sie den Beweis von Serie 1, Aufg. 1. und nutzen Sie, daß s -stufige Gauß-Verfahren Kollokationsverfahren (vgl. Serie 5, Aufg. 3) mit s Knoten sind (d.h. die c_i sind gerade die Gaußpunkte) und dass die induzierte Quadratur vom Exaktheitsgrad $2s - 1$ ist.

6.3. Betrachten Sie das klassische RK4-Verfahren für das System

$$\begin{aligned} y_1' &= -10y_1 + 9y_2 \\ y_2' &= 9y_1 - 10y_2. \end{aligned}$$

Geben Sie eine Gleichung an, aus der Sie die größte Schrittweite $h_{max} > 0$ bestimmen können, für die dieses System numerisch stabil gerechnet werden kann. Berechnen Sie mittels des Newtonverfahren h_{max} . Führen Sie auch das RK4-Verfahren auf $[0, 5]$ durch mit Schrittweiten $h = T/N, N = 1, 2, \dots, 100$ und Anfangsdaten $[2; 1]$. Plotten Sie den Fehler ($\log \log$) gegen h . Tragen Sie die von Ihnen berechnete kritische Schrittweite ein.

6.4. Gegeben sei ein implizites s -stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Daten $b, c \in \mathbb{R}^s$ und $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Anstatt in einem Schritt des Verfahrens den impliziten Stufenvektor $k \in \mathbb{R}^s$ exakt zu berechnen (als Limes der Fixpunktiteration), führen wir nur m Schritte der Fixpunktiteration durch. Mit dem Startwert $k^{(0)} := f(t_i, y_i)(1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^s$ erhalten wir also eine Approximation $\tilde{k} := k^{(m)} \in \mathbb{R}^s$ von k . Dieses Vorgehen definiert das Einschrittverfahren

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s b_j \tilde{k}_j \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

Ist dieses Verfahren A-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

6.5. Geben Sie die Stabilitätsfunktion R des θ -Schemas an. Für welche θ ist das θ -Schema A-stabil? Für welche ist es L-stabil? *Hinweis:* es reicht, die Werte $z \in \mathbb{C}$ zu finden, für die $|R(z)| = 1$ ist.

6.6. Betrachten Sie ein s -stufiges Kollokationsverfahren (vgl. Serie 5, Aufg. 3). Definieren Sie das Polynom

$$M(x) = \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s (x - c_i).$$

Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, daß sich die Stabilitätsfunktion $z \mapsto R(z)$ für Kollokationsverfahren als $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ schreiben läßt, wobei die Polynome $P, Q \in \mathcal{P}_s$ wie folgt gegeben sind:

$$P(z) = M^{(s)}(1) + M^{(s-1)}(1)z + \cdots + M(1)z^s \quad (2)$$

$$Q(z) = M^{(s)}(0) + M^{(s-1)}(0)z + \cdots + M(0)z^s. \quad (3)$$

- a) Nehmen sie an, daß die Darstellung (2), (3) bereits gezeigt ist. Zeigen Sie, daß Gaußverfahren *nicht* L -stabil sein können.
- b) Zeigen Sie die Darstellung (2), (3). *Hinweis:* Es reicht, den Fall $h = 1, y_0 = 1$ zu betrachten. Überlegen Sie sich, daß mit $z = \lambda h = \lambda$ das Kollokationspolynom $u \in \mathcal{P}_s$ aus Serie 5, Aufg. 3 die Bedingung

$$u'(x) - zu(x) = KM(x), \quad (4)$$

erfüllt, wobei $K \in \mathbb{C}$ eine von x unabhängige Konstante ist. Sie haben $R(z) = u(1)/u(0)$. Um $u(x)$ zu bestimmen, differenzieren Sie (4) s Mal, und kombinieren die erhaltenen Gleichungen linear.

- 6.7.** a) Betrachten Sie für die autonome Differentialgleichungen $y' = f(y)$ das *linear implizite Eulerverfahren*: $y_{i+1} = y_i + hk_1$, wobei k_1 die Lösung von

$$k_1 = J \cdot (y_i + hk_1) + [f(y_i) - J \cdot y_i], \quad J := \partial_y f(y_i).$$

Zeigen Sie, dass das linear implizite Eulerverfahren Konsistenzordnung 1 hat. Ist das Verfahren A-stabil? Wie lautet die Stabilitätsfunktion?

- b) Überlegen Sie sich, daß jedes AWP $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ durch Übergang auf ein geeignetes System *autonomisiert* werden kann, d.h. die Lösung y kann durch Lösen eines autonomen Systems der Form $Y' = \mathcal{F}(Y)$ bestimmt werden. Geben Sie Y und \mathcal{F} an sowie die Anfangsbedingungen für Y .