Serie 7

Abgabe: bis Fr., 15.4.11, 12 Uhr im 4. Stock

7.1. (Extrapolationsverfahren) Betrachten Sie ein explizites Einschrittverfahren der Ordnung p mit Inkrementfunktion Φ für eine Differentialgleichung $y' = f(t, y)$. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und daß alle Ableitungen von f und Φ beschränkt sind. Es sei y_{ex} die Lösung des AWP $y' = f(t, y)$ mit $y_{ex}(t_0) = y_0$. Den Konsistenzfehler "auf" der Lösung bezeichnen wir mit $\tau_{auf}(t, h) := \tau(t, y_{ex}(t), h)$. Nehmen Sie an, daß der Konsistenzfehler eine Darstellung

$$\tau_{auf}(t, h) = d(t)h^{p+1} + R(t, h)$$

zuläßt, wobei die Funktion R eine Abschätzung

$$|R(t, h)| \leq Ch^{p+2} \qquad \forall t \in [t_0, T], \quad h \in (0, h_0]$$

erfüllt und d glatt ist.

a) Definieren Sie ein zweites Verfahren, basierend auf Φ, das aus einem "Doppelschritt" der Länge $h/2$ besteht:

$$\widehat{y}_1 := y_{1/2} + \frac{h}{2}\Phi(t_{1/2}, y_{1/2}, h/2), \qquad y_{1/2} := y_0 + \frac{h}{2}\Phi(t_0, y_0, h/2),$$

wobei $t_{1/2} = t_0 + h/2$. Geben Sie die Inkrementfunktion $\widehat{\Phi}$ an, die dieses Verfahren beschreibt. Zeigen Sie: "Auf" der Lösung ist der Konsistenzfehler $\widehat{\tau}_{auf}(t, h) := \widehat{\tau}(t, y_{ex}(t), h)$ dieses neuen Verfahrens von der Form

$$\widehat{\tau}_{auf}(t, h) = \tau(t, h/2) + \tau(t + h/2, h/2) + \widehat{R}(t, h),$$

wobei $|\widehat{R}(t, h)| \leq \widehat{C}h^{p+2}$ für eine geeignete Konstante $\widehat{C}$ unabhängig von $h \in (0, h_0]$.

b) Überlegen Sie sich, wie Sie die beiden Verfahren (Inkrementfunktionen Φ und $\widehat{\Phi}$) aus Teilaufg. a) kombinieren können, um ein Verfahren der Ordnung $p + 1$ zu erhalten. *Hinweis:* Machen Sie den Ansatz $\widetilde{y} := c_1 y_1 + c_2 \widehat{y}$, wobei y_1 und $\widehat{y}$ die Approximationen zu den Inkrementfunktionen Φ, $\widehat{\Phi}$ gehören, und nutzen Sie aus, daß die Funktion $t \mapsto d(t)$ in der Darstellung von τ_{auf} glatt ist.

7.2. (**Programmieraufgabe 7.2**) Programmieren Sie Routinen mit folgenden Signaturen:

$$[y] = \texttt{euler\_multistep}(f, t, y, h, n)$$
$$[y] = \texttt{euler\_extrapol}(f, t, y, h)$$
$$[y] = \texttt{euler\_doubly\_extrapol}(f, t, y, h)$$

dabei soll f immer ein *function handle* auf eine skalarwertige Funktion sein. Diese Routinen realisieren jeweils einen Schritt der Länge h eines Einschrittverfahrens:

(i) `euler_multistep` macht n (explizite) Eulerschritte der Länge h/n,

(ii) `euler_extrapol` extrapoliert das explizite Eulerverfahren: sei y_1 ein Schritt des Eulerverfahrens mit Länge h und $\widehat{y}_1$ zwei Schritte des Eulerverfahrens mit jeweils Länge $h/2$, dann ist

$$\texttt{euler\_extrapol} = \frac{1}{2^p - 1}\left[2^p \widehat{y}_1 - y_1\right] \qquad \text{mit } p = 1.$$

(iii) `euler_doubly_extrapol` extrapoliert das extrapolierte explizite Eulerverfahren: bezeichnet y_1 einen Schritt des extrapolierten Eulerverfahrens mit Länge h und $\widehat{y}_1$ zwei Schritte des extrapolierten Eulerverfahrens mit jeweils Länge $h/2$, dann ist

$$\texttt{euler\_doubly\_extra} = (2^p \widehat{y}_1 - y_1)/(2^p - 1) \qquad \text{mit } p = 2.$$

Testen Sie Ihre Programme, indem Sie für das AWP $y' = y$ mit $y(0) = 1$ den Fehler zum Endzeitpunkt $T = 1$ gegen die Anzahl Schritte N auftragen. Betrachten Sie das Verhalten der Verfahren `euler_multistep` für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, sowie `euler_extrapol`, `euler_doubly_extrapol`. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie? Erklären Sie mit Aufg. 1.

7.3. Zeigen Sie, daß ein k-Schritt-BDF-Verfahren Konsistenzordnung k hat.

7.4. (**schriftlich**) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ heißt *stabil* ("power bounded"), falls es eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^k$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|A^n\| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: falls (1) für *eine* Matrixnorm gilt, dann gilt (1) bereits für *jede* Norm.

b) Zeigen Sie folgende Äquivalenz: A ist stabil genau dann, wenn für das Spektrum $\sigma(A)$ gilt: für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $|\lambda| \leq 1$ und $|\lambda| = 1$ impliziert, daß die geometrische Vielfachheit von λ mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt. *Hinweis:* Ein (einzelner) Jordanblock $J \in \mathbb{C}^{\mu\times\mu}$ zum EW λ kann geschrieben werden als $J = \lambda \mathrm{Id}_\mu + N$. Es gilt der binomische Lehrsatz: $J^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda^{n-\nu} N^\nu$. Wie sieht Ne_ℓ aus, wenn $e_\ell \in \mathbb{C}^\mu$ ein Einheitsvektor ist? Betrachten Sie die beiden letzten Komponenten der Vektoren $J^n e_\mu$, wobei $e_\mu = (0, 0, \dots, 0, 1)^\top$.

7.5. (Mehrschrittverfahren variabler Schrittweite) Seien $t_0, \dots,$ Knoten und $h_i = t_{i+1} - t_i$ die Schrittweiten. Mit f_i bezeichnen wir $f(t_i, y_i)$. Formulieren Sie ein k-Schrittverfahren basierend auf dem Konstruktionsprinzip der Adams-Verfahren der Form

$$y_{i+1} - y_i = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}(h_{i+1}, h_i, \dots, h_{i+2-k}) f_{i+1-j}.$$

Geben Sie für den Fall $k = 2$ die Funktionen $b_{i,j}$, $j = 0, 1, 2$ an.