Serie 8

Abgabe: bis Fr., 6.5.11, 12 Uhr im 4. Stock

8.1. **a)** Zeigen Sie, daß $\lambda = 1$ eine Nullstelle des ersten charakteristischen Polynoms eines konsistenten LMM ist.

b) Zeigen Sie, daß die Adams-Verfahren nullstabil sind.

c) Zeigen Sie, daß das BDF3-Verfahren, welches durch

$$11y_{i+1} - 18y_i + 9y_{i-1} - 2y_{i-2} = 6hf_{i+1}$$

gegeben ist, nullstabil ist.

8.2. **a)** Bestimmen Sie alle 2-Schrittverfahren der Konsistenzordnung (mindestens) 3. Dabei sei oBdA $\alpha_2 = 1$.

b) Welche dieser Verfahren sind nullstabil?

c) Gibt es unter den Verfahren auch explizite 2-Schrittverfahren? Sind diese nullstabil?

d) Gibt es unter den Verfahren auch solche der Ordnung 4? Sind diese nullstabil?

8.3. (**schriftlich**) Zeigen Sie folgende Aussagen über die maximal erreichbare Ordnung:

a) Es kann kein k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k + 1$ geben

b) Es gibt genau ein explizites k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k - 1$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß geeignete Hermiteinterpolationsaufgaben eindeutig lösbar sind, und wählen Sie mit dieser Information geeignete Basen von Polynomräumen.

8.4. Aufgabe 3 behandelt nicht den Fall von impliziten k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein implizites k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k$.

8.5. Ein k-Schrittverfahren heißt *symmetrisch*, falls

$$\alpha_{k-j} = -\alpha_j, \qquad \beta_{k-j} = \beta_j, \qquad j = 0, \dots, k.$$

Zeigen Sie: die (maximale) Konsistenzordnung p ist gerade.

8.6. (**Programmieraufgabe 8.6**) Programmieren Sie das 4-Schritt Adams-Moulton Verfahren der Ordnung 4 gegeben durch

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{1}{24}\left(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right),$$

wobei die benötigten Startwerte y_1, y_2, y_3 auf verschiedene Art berechnet werden.

a) Schreiben Sie eine Matlab-Routine

$$[yam, tam] = \texttt{adams\_moulton4}(t0, T, N, y0, y1, y2, y3, f, df)$$

Hier sollen f und df *function handles* sein auf die Funktionen f und $\partial_y f$. Es sollen N Schritte gemacht werden. Die benötigten Startwerte y_0, y_1, y_2, y_3 werden ebenfalls mit übergeben. Lösen Sie die nichtlineare Gleichung mit dem Newtonverfahren (Abbruchkriterien: Residuum $\leq 10^{-12}$, maximal 100 Newtonschritte). Die Ausgabe yam und tam sollen Vektoren der Länge $N+1$ sein, die die y-Werte und die Zeitwerte enthalten.

b) Testen Sie Ihr Programm mit dem Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1, \qquad T = 1, \qquad \lambda = 1.$$

Verwenden Sie $N = 2^j$, $j = 2, \dots, 10$. Zur Startwertberechnung verwenden Sie folgende Fälle:

1. y_1, y_2, y_3 sind durch die exakte Lösung $y(t) = e^{\lambda t}$ gegeben
2. y_1, y_2, y_3 werden durch das RK4-Verfahren bestimmt.
3. y_1, y_2, y_3 werden mit dem Eulerverfahren mit Schrittweite $\widetilde{h} = h^2 = \left(\frac{T-t_0}{N}\right)^2$ bestimmt.
4. y_1, y_2 werden mit dem Eulerverfahren mit Schrittweite $\widetilde{h} = h^3 = \left(\frac{T-t_0}{N}\right)^3$ bestimmt.

Plotten Sie den Fehler $(y(1) - y_N)$ gegen die Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{N}$ doppelt logarithmisch. Was beobachten Sie? Erklären Sie.