Serie 9

Abgabe: bis Fr., 13.5.11, 12 Uhr im 4. Stock

9.1. (**schriftlich**) Sei m_C die Ordnung eines (impliziten) Adams-Moulton-Verfahrens mit k Schritten und m_P die Ordnung eines expliziten Verfahrens. Zeigen Sie, daß das Verfahren, welches durch $P(EC)^m$ beschrieben wird, die Konsistenzordnung $\min\{m_C, m_P + m\}$ hat. *Hinweis:* Sie können wieder annehmen, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und alle von Ihnen benötigten Ableitungen beschränkt sind.

9.2. Man implementiere das Prädiktor-Korrektor-Verfahren $P(EC)^m$ für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor in Form einer Matlab-Funktion

```
y = predcor(m,t,y0,y1,f)
```

Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit den Stützstellen, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}^d$ sind Spaltenvektoren mit den Startwerten und f ist ein *function handle* für die Funktion $f(t, y)$. Sie dürfen annehmen, daß die Schrittlänge konstant ist. Der Parameter m gibt die Anzahl der Korrektorschritte an. Der Ausgabewert ist eine Matrix $y \in \mathbb{R}^{d\times n}$, deren Spalten gerade die Approximationen zu den Zeitpunkten t sind. Schreiben Sie weiters eine Matlab-Funktion `y1 = compute_y1(hh,N,t0,y0,f)` , die N Schritte des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittlänge hh und Startwerten $t0 \in \mathbb{R}$, $y0 \in \mathbb{R}^d$ macht. Schreiben Sie schließlich eine Matlab-Funktion `compare_methods(nmax)`, welche 6 Konvergenzgraphen (Fehler gegen Schrittweite $h = 2^{-n}$, $n = 0, \dots, nmax$) zeigt. Es werden folgende Kombinationen betrachten: $m \in \{1, 2, 3\}$ und $hh = h$ sowie $hh = h^2$. Es wird das AWP

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelöst mit Lösung $y(t) = (1, 1)^\top e^t$. Der Fehler ist der Fehler bei $T = 1$. Erklären Sie das Verhalten der 6 Kurven. Diskutieren Sie die Kosten für die beiden Anlaufrechnungen im Vergleich zu dem Gesamtkosten des Verfahrens.

Das Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 ist gegeben durch

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right).$$

9.3. **a)** Für ein LMM bezeichnet $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \text{die NS von } \zeta \mapsto \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) \text{ erfüllen die Wurzelbedingung}\}$ das Stabilitätsgebiet. Definieren Sie die Funktion $\zeta \mapsto w(\zeta) := \rho(\zeta)/\sigma(\zeta)$. Zeigen Sie: $S \subset w(K_1(0))$, wobei $K_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{C}$ ist.

b) Zeigen Sie, daß für A-stabile LMM gilt:

$$\mathrm{Re}\, w(\zeta) \geq 0 \qquad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| > 1.$$

c) Zeigen Sie, daß explizite LMM nicht A-stabil sein können.

d) Die Adams-Moulton-Verfahren haben für $k \geq 2$ ein beschränktes Stabilitätsgebiet. Zeigen Sie eine (stark) vereinfachte Fassung dieses Resultates: Unter Verwendung der Tatsache, daß es ein $\zeta_k < -1$ gibt mit $\sigma(\zeta_k) = 0$, zeigen Sie, daß es ein $z_0 > 0$ gibt, so daß $(-\infty, -z_0)$ oder (z_0, ∞) nicht im Stabilitätsgebiet liegt.

9.4. Untersuchen Sie, wieviele Lösungen das Randwertproblem

$$y' = ty^2, \qquad y(1) - y(0) = c$$

in Abhängigkeit vom Parameter c hat.

9.5. (**Programmieraufgabe 9.5**) Schreiben Sie eine Matlab-Routine

$$[y, errs] = \texttt{simple\_shooting}(n, s)$$

welches das Randwertproblem

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \qquad y(0) = 4, \qquad y(1) = 1$$

mit dem einfachen Schießverfahren löst. Hierbei soll n die Anzahl Newtonschritte sein, und der Rückgabewert y soll der Funktionswert bei $t = 1/2$ sein. Der Parameter s ist der Startwert für das Newtonverfahren (d.h. eine erste Approximation an $y'(0)$). Der Vektor `errs` hat die Länge n und enthält die Fehler des Newtonverfahren. Genauer: $\texttt{errs}(i) = |y(1) - y_N^{(i)}| = |1 - y_N^{(i)}|$, wobei $y_N^{(i)}$ die Approximation an $y(1)$ ist, die im i-ten Newtonschritt erzielt wird. Verwenden Sie als Anfangswertproblemlöser die MATLAB-Routine `ode45`. *Hinweis:* Schreiben Sie wie in der Vorlesung die ODE zweiter Ordnung als ein System erster Ordnung. Formulieren Sie weiters ein System von ODEs, welches von y, y', $\partial_s y$, $\partial_s y'$ gemeinsam gelöst wird. Plotten Sie `errs` über der Anzahl Newtonschritte für die Eingabe $n = 10$ und $s = 1$.

9.6. **a)** Eine Funktion $\mathcal{I} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ heißt *Invariante/erstes Integral* der ODE $y' = f(y)$, wenn für jeden Startwert $y_0 \in \mathbb{R}^d$ gilt: $t \mapsto I(y_{0,y_0}(t))$ ist konstant. Zeigen Sie: I ist genau dann eine Invariante/erstes Integral der ODE, wenn

$$\nabla I(z) \cdot f(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

b) Sei $I \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ für ein $m > 1$. Geben Sie die zu (1) analoge Bedingung an die Funktion I an, damit I eine Invariante der ODE ist.

c) Zeigen Sie: für ein hamiltonsches System ist die Hamiltonfunktion H eine Invariante.

9.7. (*symplektisches Euler Verfahren*) Für ein Differentialgleichungssystem der Form

$$x' = f(x, y) \qquad y' = g(x, y) \tag{2}$$

definiert man einen Schritt des symplektischen Euler Verfahrens durch

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hg(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{aligned}$$

Sei nun $f(x, y) = y$, $g(x, y) = -x$.

a) Zeigen Sie: Jede Lösung von (1) liegt auf einem Kreis, d.h.

$$H(t) \equiv x^2(t) + y^2(t) = \text{constant} \qquad \forall t$$

b) Wenden Sie das symplektische Euler-Verfahren mit Schrittweite h auf die Differentialgleichung an und geben Sie die Abbildung $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ explizit an.

c) Zeigen Sie: Die numerische Approximation (x_i, y_i) liegt ebenfalls auf einer invarianten, geschlossenen Kurve. *Hinweis:* Es genügt zu zeigen, daß die Approximationen (x_i, y_i) auf einer Ellipse der Form

$$x_i^2 + hx_iy_i + y_i^2 \equiv \text{constant} \qquad \forall i$$

liegen.