

Serie 11

Abgabe: bis Fr., 27.5.11, 12 Uhr im 4. Stock

11.1. (“composition method”) Sei $\Phi^h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ die kontinuierliche Evolution und bezeichne Ψ^h eine diskrete Evolution (die wir der Einfachheit halber auch als Abbildung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ auffassen) mit Konsistenzordnung p . Nehmen Sie an, daß es eine C^1 -Funktion $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$\Psi^h(y) - \Phi^h(y) = C(y)h^{p+1} + O(h^{p+2}), \quad |h| \rightarrow 0.$$

Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1 \\ \gamma_1^{p+1} + \gamma_2^{p+1} &= 0. \end{aligned}$$

Definieren Sie ein neues Verfahren $\widehat{\Psi}^h$ durch

$$\widehat{\Psi}^h(y) := \Psi^{\gamma_1 h} \circ \Psi^{\gamma_2 h}.$$

Zeigen Sie: das Verfahren hat (mindestens) die Ordnung $p+1$, d.h. zeigen Sie: $\widehat{\Psi}^h(y) - \Phi^h(y) = O(h^{p+2})$.

11.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$ heißt symplektisch, falls $A^\top J A = J$. Zeigen Sie: die Menge der symplektischen Matrizen bildet eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation.

11.3. Zeigen Sie: die Verkettung zweier symplektischer Abbildungen ist wieder symplektisch.

11.4. Zeigen Sie, daß die beiden symplektischen Eulerverfahren

$$p_{i+1} = p_i - h \nabla_q H(p_{i+1}, q_i) \tag{1a}$$

$$q_{i+1} = q_i + h \nabla_p H(p_{i+1}, q_i) \tag{1b}$$

sowie

$$p_{i+1} = p_i - h \nabla_q H(p_i, q_{i+1}) \tag{2a}$$

$$q_{i+1} = q_i + h \nabla_p H(p_i, q_{i+1}) \tag{2b}$$

symplektisch und von 1. Ordnung sind. Zeigen Sie weiters: Variante (2) ist die adjungierte Methode von (1).

11.5. Das Störmer-Verlet-Verfahren ergibt sich durch Verkettung der beiden in Aufg. 11.4 vorgestellten symplektischen Eulerverfahren (genauer: es wird zuerst ein Schritt der Länge $h/2$ der Variante (1) und dann ein Schritt der Länge $h/2$ der Variante (2) gemacht). Zeigen Sie: Das Störmer-Verlet-Verfahren ist symplektisch, symmetrisch und von der Ordnung 2.

11.6. (schriftlich) Es soll gezeigt werden, daß Gaußverfahren auf volumenerhaltende diskrete Evolutions führen können. Wir betrachten hier nur den 2-dimensionalen Fall.

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, und es gelte: $\|f(\mathbf{y})\| + \|D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y})\| \leq L$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Damit existiert $\Phi^t(\mathbf{y})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie für den Fall $n = 2$ folgendes Resultat (welches tatsächlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt): Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\det(A + \varepsilon B A) - \det A) = \det A \operatorname{tr} B, \quad \operatorname{tr} B := \sum_{i=1}^n B_{ii}.$$

a) Sei die matrixwertige Funktion $W = W(t, \mathbf{y})$ Lösung die Lösung des AWP

$$W' = Df(\Phi^t(\mathbf{y}))W, \quad W(0) = I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Zeigen Sie:

$$(\det W)' = \det W (\nabla \cdot f)(\Phi^t(\mathbf{y})),$$

wobei für $f(\mathbf{y}) = (f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}))^\top$ gesetzt wird: $\nabla \cdot f(\mathbf{y}) = \partial_1 f_1(\mathbf{y}) + \partial_2 f_2(\mathbf{y})$.

b) Sei f zusätzlich divergenzfrei, d.h. $\nabla \cdot f(\mathbf{y}) = 0$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\det W(t, \mathbf{y}) = \det(D\Phi^t(\mathbf{y}))$ eine Invariante der Evolution Φ^t . Zeigen Sie: wenn man ein Gaußverfahren auf das System

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= f(\mathbf{y}), & \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0 \\ W' &= D_{\mathbf{y}}f(\mathbf{y})W, & W(0) &= I \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

angewendet, dann ist die Determinante der W -Komponente eine Invariante der diskreten Evolution (d.h.: schreibt man für das Ergebnis eines Schrittes des Gaußverfahrens (\mathbf{y}_1, W_1) , so ist $\det W_1 = \det W_0$).

Bemerkung: Für f mit $\nabla \cdot f = 0$ folgt aus Obigem, daß die Evolution Φ^t volumenerhaltend ist, d.h. für hinreichend kleine h gilt

$$\int_{\Omega} 1 \, dx = \int_{\Phi^t(\Omega)} 1 \, dx. \quad (3)$$

Wie wir in der Vorlesung sehen werden (Lemma 6.41) folgt aus den obigen Überlegungen auch, daß die diskrete Evolution Ψ^h volumenerhalten ist, d.h.

$$\int_{\Omega} 1 \, dx = \int_{\Psi^h(\Omega)} 1 \, dx.$$

Insbesondere muß man also gar nicht das Gaußverfahren auf das gekoppelte System für \mathbf{y} und W verwenden, sondern es reicht, daß Gaußverfahren für \mathbf{y} zu verwenden.