Serie 12

Abgabe: bis Fr., 3.6.11, 12 Uhr im 4. Stock

12.1. (**Programmieraufgabe 12.1**) Betrachten Sie das "Keplerproblem" bei dem $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ durch das folgende Hamiltonsche System beschrieben werden:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|_2^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|_2}.$$

Verwenden Sie folgende Anfangswerte:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{pmatrix} 1-e \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{pmatrix}, \qquad e = 0.6.$$

Programmieren Sie für dieses System 3 symplektische Verfahren, nämlich die beiden symplektischen Eulerverfahren (siehe Aufg. 11.4 sowie das Störmer-Verlet-Verfahren (siehe Aufg. 11.5) Die Eingabe für diese Verfahren soll die Anzahl N der Schritte, die Schrittweite h sowie die Startwerte $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$ sein. Die Rückgabe soll ein Vektor t mit den Zeitpunkten und Vektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ mit den Werten zu den Zeitpunkten t_i sein.

Schreiben Sie ein weiteres Programm, welches die Energieerhaltung der 3 symplektischen Verfahren testet. Machen Sie hierfür (zu den o.g. Startwerten) $2^n N_0$ Schritte der Schrittlänge $h_0 2^{-n}$, wobei $N_0 = 4000$ und $h_0 = 0.05$ und $n = 0, \ldots, 4$. Plotten Sie (doppelt logarithmisch) den Energiefehler über h. Was beobachten Sie? Erklären Sie.

12.2. Wenn ein Schritt eines Einschrittverfahrens symplektisch ist, dann gilt für jedes k:

$$(D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k)^\top J(D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k) = J$$

12.3. (**schriftlich**) Betrachten Sie Splitting-Verfahren für $y' = f(y)$, d.h. seien Φ_1^t und Φ_2^t die Evolutionen für die ODEs $y' = f^{[1]}(y)$ und $y' = f^{[2]}(y)$.

a) Zeigen Sie: das Lie-Trotter-Verfahren $\Psi_{LT}^h := \Phi_1^h \circ \Phi_2^h$ hat Konsistenzordnung 1.

b) Zeigen Sie: $(\Psi_{LT}^h)^\star = \Phi_2^h \circ \Phi_1^h$

c) Definieren Sie das Strang-Splitting durch $\Psi_S^h := \Phi_1^{h/2} \circ \Phi_2^h \circ \Phi_1^{h/2}$. Zeigen Sie: das Verfahren hat Ordnung 2.

d) Seien die Evolutionen Φ_1^h, Φ_2^h symplektisch. Zeigen Sie: das Lie-Trotter-Splitting und das Strang-Splitting liefern symplektische Verfahren.

12.4. Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Eine wichtige Klasse von Differentialgleichungen ist von der Form

$$y'' = g(y)$$

Führt man die Variable $z = y'$ ein, so erhält man in der üblichen Weise ein System von ODEs 1. Ordnung:

$$z' = g(y), \qquad y' = z.$$

Solche System können quadratische Invarianten der Form $Q(y,z) = y^\top S z$ haben, wobei $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Matrix ist (z.B. ist der Drehimpuls aus Übung 6.4 des Skriptes von dieser Bauart).

Eine Klasse von numerischen Verfahren sind Nyströmverfahren, von der folgenden Runge-Kutta Form ((y_1, z_1) sind das Ergebnis eines Schrittes des Verfahrens mit Startwert (y_0, z_0)):

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hz_0 + h^2 \sum_{i=1}^s \beta_i k_i, \\ z_1 &= z_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \\ k_i &= g(y_0 + c_i h z_0 + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \qquad i = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: falls $x^\top Sx = 0$ für alle x, dann ist S schiefsymmetrisch, d.h. $S^\top = -S$.

b) Zeigen Sie: $I(y,z) := y^\top Sz$ ist eine (quadratische) Invariante genau dann, wenn

$$S \text{ ist schiefsymmetrisch} \qquad \text{und} \qquad x^\top Sg(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

c) Es mögen die Koeffizienten b_i, c_i, β_i und a_{ij} die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \beta_i &= b_i(1-c_i), && i = 1,\dots,s \\ b_i(\beta_j - a_{ij}) &= b_j(\beta_i - a_{ji}), && i,j = 1,\dots,s. \end{aligned}$$

Dann gilt: Das obige Nyströmverfahren erhält alle quadratischen Invarianten der Form $I(y,z) = y^\top Sz$. *Hinweis:* überlegen Sie sich, daß S schiefsymmetrisch sein muß und daß $x^\top Sg(x) = 0$ für alle x gelten muß. Es ist ferner zweckmäßig, an geeigneten Stellen mit $Y_i := y_0 + c_i h z_0 + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j$ zu arbeiten. Bemerken Sie, daß $Y_i^\top Sg(Y_i) = Y_i^\top S k_i$ ist.

12.5. Betrachten Sie für glatte Koeffizienten a, b, c den Differentialoperator

$$Lu = -a(x)u'' + b(x)u'. \tag{1}$$

Auf Ω sei ein Gitter definiert mit Knoten $x_i = ih$, $i = 0,\dots,N$ für $h = 1/N$. Definieren Sie für Gitterfunktionen $u_h = (u_i)_{i=0}^N$ die Operatoren D_h^+, D_h^- durch

$$(D_h^+ u)_i := \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \qquad (D_h^- u)_i := \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \qquad i = 1,\dots,N-1.$$

und die "symmetrische" Diskretisierung L_h durch

$$(L_h u_h)_i = -a(x_i)(D_h^- D_h^+ u_h)_i + b(x_i)\frac{1}{2}\left((D_h^+ u_h)_i + (D_h^- u_h)_i\right), \qquad i = 1,\dots,N-1.$$

a) Zeigen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*: Sei h so klein, daß

$$a(x_i) \pm \frac{1}{2} h b(x_i) > 0 \qquad \forall i \in \{0,\dots,N\}. \tag{2}$$

Dann gilt für alle Gitterfunktionen u_h:

$$(L_h u_h)_i \le 0 \qquad \forall i \in \{1,\dots,N-1\} \qquad \Longrightarrow \qquad \max_{i=0,\dots,N} u_i \le \max\{u_0, u_N\}.$$

b) Zeigen Sie die Existenz einer Gitterfunktion φ_h mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_h \ge 0, \qquad L_h \varphi_h \le -1, \qquad \|\varphi_h\|_\infty \le C \quad \text{für ein } C > 0 \text{ unabhängig von } h.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $e^{\lambda x}$ für geeignetes $\lambda > 0$.