Serie 13

Abgabe: bis Fr., 10.6.11, 12 Uhr im 4. Stock

13.1. (**schriftlich**) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ die Aufgabe

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Gitterpunkte $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$. Betrachten Sie eine Diskretisierung $L_h u^h = f_h$, wobei das LGS für u^h die folgende Form[1] hat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(-u^h_{i-1} + 2u^h_i - u^h_{i+1}) + u_i &= f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\ \frac{2}{h^2}\left(u^h_0 - u^h_1\right) + u_0 &= f(x_0), \\ \frac{2}{h^2}\left(-u^h_{n-1} + u^h_n\right) + u_n &= f(x_n). \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das obige LGS in Matrixform $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ und zeigen Sie, daß die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ die Vektoren $\mathbf{v}^k \in \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 0, \ldots, n$ mit Komponenten

$$\mathbf{v}^k_i = \cos(kih\pi), \qquad i = 0, \ldots, n$$

sind. Die Eigenwerte sind $\lambda_k = 1 + \frac{2(1-\cos kh\pi)}{h^2}$.

b) Zeigen Sie, daß der Fehler $u^h - [u]_h$ von der Größe $O(h^{1/2})$ ist, wenn er in der l^2-Norm gemessen wird, d.h. mit einer Konstanten $C > 0$ unabhängig von h gilt

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |u^h_i - u(x_i)|^2} \leq C h^{1/2}.$$

Hinweis: Sie dürfen die elementar nachrechenbare Eigenschaft nutzen, daß die Vektoren $\mathbf{v}^k$, $k = 0, \ldots, n$ orthogonal zueinander sind bzgl. des euklidischen Skalarprodukts. Für die Berechnung des Konsistenzfehlers dürfen Sie annehmen, daß die exakte Lösung u die Differentialgleichung auch in den Endpunkten x_0 und $x_n = 1$ erfüllt.
Bemerkung: tatsächlich kann man das schärfere Resultat $O(h^{3/2})$ für den Fehler beweisen.

13.2. (Fortsetzung von Aufg. 12.5)

a) Zeigen Sie unter der Voraussetzung (wie in Aufg. 12.5)

$$a(x_i) \pm \frac{1}{2} h b(x_i) > 0 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, N\},$$

daß für ein $C > 0$ unabhängig von h für alle Gitterfunktionen u^h gilt:

$$\|u^h\|_\infty \leq \max\{|u^h_0|, |u^h_N|\} + C\|L_h u^h\|_\infty$$

Schließen Sie, daß für jeden Vektor $f \in \mathbb{R}^{N-1}$ und alle u_{links}, $u_{rechts} \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem: finde $(u^h)_{i=0}^N$, so daß

$$(L_h u^h)_i = f_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \qquad u^h_0 = u_{links}, \qquad u^h_N = u_{rechts}$$

eine eindeutige Lösung hat und zudem

$$\|u^h\|_\infty \leq C \max\{|u_{links}|, |u_{rechts}|, \|f\|_\infty\}$$

gilt für ein $C > 0$ unabhängig von h.

[1] diese Form wird Abschnit 6.3 des Skriptes kurz motiviert

b) Betrachten Sie das Randwertproblem: finde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so daß

$$Lu = f \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

für ein glattes $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, daß für die Diskretisierung aus Aufg. 12.5 die Fehlerabschätzung

$$\max_{i=0,\dots,N} |u(x_i) - u_i^h| \leq Ch^2$$

gilt. Welche Konvergenz liefern Ihre Abschätzungen, wenn $f \in C^1(\overline{\Omega})$?

13.3. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *inversmonoton*, falls ($\leq$ ist bei Vektoren komponentenweise zu verstehen)

$$Ax \leq Ay \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq y.$$

Zeigen Sie: eine inversmonotone Matrix A ist invertierbar, und $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).

13.4. (**Programmieraufgabe 13.4**) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)^2$ das Problem

$$Lu := -\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1}$$

Das regelmäßige Gitter $\overline{\Omega}_h$ wird durch die Knoten $x_{ij} := (ih, jh)$, $i, j = 0, \dots, n+1$ mit $h = 1/(n+1)$ beschrieben. Der 5-Punkt-Stern und der 9-Punkt-Stern sind zwei Diskretisierungen von $-\Delta$, die Approximationen an $(-\Delta u)(x_{ij})$ für die inneren Knoten (d.h. $1 \leq i, j \leq n$) darstellen[2]:

$$(L_h^5 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{i,j}^h - u_{i+1,j}^h - u_{i-1,j}^h - u_{i,j+1}^h - u_{i,j-1}^h\right),$$

$$(L_h^9 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{6h^2}\left(20u_{i,j}^h - 4u_{i+1,j}^h - 4u_{i-1,j}^h - 4u_{i,j+1}^h - 4u_{i,j-1}^h - u_{i-1,j-1}^h - u_{i-1,j+1}^h - u_{i+1,j-1}^h - u_{i+1,j+1}^h\right).$$

Diese Diskretisierungen werden kompakt wie in Fig. 1 dargestellt notiert. Als Gleichungssystem für die Approximationen u_{ij}^h in den inneren Knoten x_{ij} betrachten Sie 3 Fälle:

$$\begin{aligned}
(L_h^5 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \leq i, j \leq n,\\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \leq i, j \leq n,\\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{12}\left[8f(x_{ij}) + f(x_{i+1,j}) + f(x_{i-1,j}) + f(x_{i,j-1}) + f(x_{i,j+1})\right], \qquad 1 \leq i, j \leq n.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie 2 Matlabprogramme mit den Signaturen

$$A9 = \texttt{nine\_point\_stencil}(n) \qquad\qquad A5 = \texttt{five\_point\_stencil}(n),$$

welche die Matrizen $A9$ und $A5 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $N = n^2$ zurückgeben, die zu den Diskretisierungen L_h^5 und L_h^9 gehören. Verwenden `sparse`-Matrizen, d.h. legen Sie $A9$ und $A5$ mit `spalloc(N,N,9*N)` bzw. `spalloc(N,N,5*N)` an. Verwenden Sie für die Nummerierung der (inneren) Knoten die lexikographische Nummerierung, d.h. der Doppelindex (i,j) mit $1 \leq i, j \leq n$ hat die Nummer $\nu(i,j) = (i-1)n + j$. Sie dürfen annehmen, daß $n > 2$ ist.

Schreiben Sie weiters eine Routine mit der Signatur

$$[\texttt{u5}, \texttt{u9\_4}, \texttt{u9\_2}] = \texttt{poisson}(n, f)$$

wobei f ein *function handle* für eine Funktion $z = f(x,y)$ ist. Die Rückgabewerte sollten die Lösungsvektoren sein, die zu den 3 obigen Diskretisierungen gehören.

Wenden Sie `poisson` für $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ an (dann ist die exakte Lösung des Problems $u(x,y) = \sin(\pi x)\,\sin(\pi y)$) und Schrittweiten $h = 2^{-n}$, $n = 1,\dots,7$. Plotten Sie für die drei Diskretisierungen den Fehler (doppelt logarithmisch) gegen h. Welche Konvergenzverhalten beobachten Sie?

[2] der 5-Punkt-Stern ist der in VO diskutierte

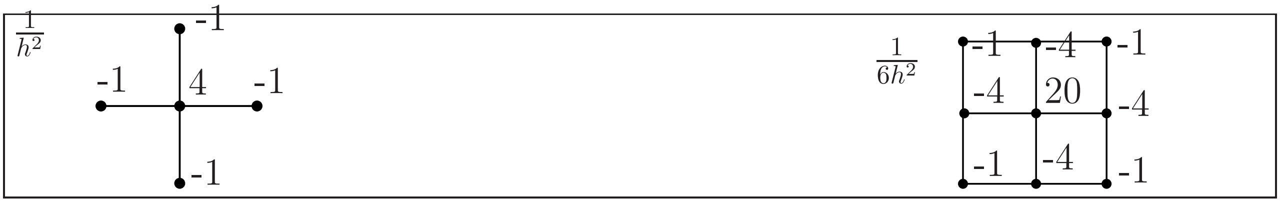

Abbildung 1: 5-Punkt (links) und 9-Punkt-Stern (rechts)