Serie 14

Abgabe: bis Fr., 17.6.11, 12 Uhr im 4. Stock

14.1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ist, wobei A_{11} und A_{22} nichttriviale quadratische Matrizen sind. A heißt *irreduzibel*, falls A nicht reduzibel ist. A hat die *Ketteneigenschaft*, falls, es zu jedem Paar $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ eine Folge $i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j$ gibt, so daß

$$A_{i_0,i_1},\ A_{i_1,i_2}, \dots, A_{i_{\ell-1},i_\ell} \neq 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie: A irreduzibel $\iff$ A hat die Ketteneigenschaft. *Hinweis:* zeigen Sie A reduzibel $\iff$ A hat nicht die Ketteneigenschaft. Betrachten Sie für geeignete i die Menge $\mathcal{E}(i) := \{j \,|\, \exists \text{Kette } i = i_0, i_1, \dots, i_\ell = j \text{ mit (1)}\}$ der von i aus "erreichbaren" Indizes.

14.2. Zeigen Sie, daß die Matrix $A9$ aus Aufg. 13.4 eine M-Matrix ist. Geben Sie eine explizite Abschätzung für $\|A9^{-1}\|_\infty$ an. *Hinweis:* Satz 6.10 ("M-Kriterium").

Sei u^h die Gitterfunktion, die durch Lösen von $L_h^9 u^h = B_h f^h$ entsteht, wobei $B_h f^h$ definiert ist als

$$(B_h f^h)(x_{ij}) = \frac{1}{12}\left(8f^h(x_{i,j}) + f^h(x_{i+1,j}) + f^h(x_{i-1,j}) + f^h(x_{i,j+1}) + f^h(x_{i,j-1})\right), \qquad 1 \le i,j \le n.$$

Zeigen Sie, daß $\|[u]_h - u^h\|_\infty \le Ch^4$, falls die gesuchte Lösung u hinreichend glatt ist. *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß man durch Taylorentwicklung nachrechnen kann, daß

$$\|L_h^9[u]_h - B_h([-\Delta u]_h)\|_\infty \le Ch^4 \max_{|\alpha|=6} \|D^\alpha u\|_{C([0,1]^2)} \qquad \forall u \in C^6([0,1]^2).$$

14.3. (**schriftlich**) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definieren Sie die (offenen) *Gerschgorinkreise*

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| < r_i\}, \qquad r_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{ij}|.$$

a) Zeigen Sie: Das Spektrum $\sigma(A)$ ist im Abschluß der Vereinigung der Gerschgorinkreise enthalten:

$$\sigma(A) \subset \cup_{i=1}^n \operatorname{clo}(K_i); \qquad \operatorname{clo}(K_i) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - A_{ii}| \le r_i\}.$$

b) Zeigen Sie: falls A die Ketteneigenschaft hat (oder: A ist irreduzibel—siehe Aufg. 14.1 dann ist

$$\sigma(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n K_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^n \partial K_i\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $\lambda \in \sigma(A) \setminus \cup_{i=1}^n K_i$ und zeigen Sie, daß dann $\lambda \in \cap_{i=1}^n \partial K_i$. Hierzu sei oBdA ein zu λ gehöriger EV ξ zu $\|\xi\|_\infty = 1$ normiert. Dann gilt für jeden Index m mit $|\xi_m| = 1$, daß $\lambda \in \partial K_m$. Überlegen Sie sich, daß dann auch $|\xi_{m'}| = 1$ gilt für jeden Index m' mit $|A_{m,m'}| \neq 0$. Nutzen Sie dann die Ketteneigenschaft.

14.4. **a)** Zeigen Sie: für strikt diagonal dominante Matrizen A mit Diagonale D gilt für den Spektralradius von $I - D^{-1}A$, daß $\rho(I - D^{-1}A) < 1$.

b) A heißt irreduzibel diagonal dominant, wenn A irreduzibel ist und

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| \le |A_{ii}| \qquad \forall i$$

und eine strikte Ungleichung für mindestens einen Index i gilt. Zeigen Sie: Es gilt $\rho(I - D^{-1}A) < 1$. *Hinweis:* verwenden Sie Aufg. 14.3 Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß D^{-1} existiert (dies könnte man aus der Irreduzibilität von A folgern).

14.5. Sei A eine L-Matrix (d.h. $A_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ und $A_{ii} > 0$ für alle i). Es gilt die Äquivalenz: A ist eine M-Matrix $\Longleftrightarrow \rho(I - D^{-1}A) < 1$. Zeigen Sie von dieser Äquivalenz die Richtung $\Longleftarrow$. Schließen Sie mit Aufg. 14.4, daß irreduzibel diagonal dominante Matrizen M-Matrizen sind.

In Aufg.14.2 wurde gezeigt, daß die Matrix A9 eine M-Matrix ist. Überlegen Sie sich einen alternativen Beweis, indem sich sich überlegen, daß A9 irreduzibel ist (d.h. die Ketteneigenschaft hat).

14.6. Sei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ ein beliebiges Gitter auf $\Omega = (0,1)$. Sei $h_i = x_{i+1} - x_i$ für $i = 0, \ldots, N-1$. Betrachten Sie die Diskretisierung von $-u'' = f$ auf $\Omega = (0,1)$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ durch

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0, \quad -\frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

Zeigen Sie: Einsetzen der Bedingungen $u_0 = 0$ und $u_N = 0$ führt auf ein LGS $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ für die Unbekannten $u_1, \ldots, u_{N-1}$, wobei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ eine M-Matrix ist.

14.7. (**Programmieraufgabe 14.7**) Es soll

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{auf } \Omega = (0,1)^2, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

mit einem Differenzenverfahren gelöst werden. Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[\texttt{sol}, \texttt{nr\_steps}] = \texttt{nonlinear\_solve}(\texttt{n}, \texttt{u0}, \texttt{tol}, \texttt{f}),$$

welches das Randwertproblem numerisch löst. Hier gibt wie in Programmieraufg. 13.4 der Parameter n die Anzahl Punkte pro Richtung an, `u0` ist der Startvektor für das Newtonverfahren, und `tol` ist die Toleranz für das Newtonverfahren. Schließlich ist f ein *function handle* für eine Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Verwenden Sie zur Diskretisierung von $-\Delta$ den 5-Punkt-Stern aus Programmieraufg. 13.4. Die Abbruchbedingung für das Newtonverfahren ist der Einfachheit halber so, daß die $\|\cdot\|_\infty$-Norm zweier aufeinanderfolgender Newtoniterierte $\leq$ `tol` ist. Der Rückgabevektor `sol` ist der Vektor der Knotenwerte, `nr_steps` gibt die Anzahl benötigter Newtonschritte an.
Welche Konvergenzrate beobachten Sie? *Zusatzaufgabe:* Wie kann ein Verfahren der Ordnung 4 erzeugt werden? *Hinweis:* Aufg. 14.2.