Serie 15

Abgabe: bis Fr., 24.6.11, 12 Uhr im 4. Stock

15.1. Betrachten Sie den allgemeinen 9-Punkt-Stern wie in Abb. 1 beschrieben zur Approximation von $-\Delta$. Der Konsistenzfehler $\tau(h)$ an der Stelle (x,y) ist dann definiert als

$$\begin{aligned}\tau(h,u) \quad := \quad & \Big| -(-\Delta u)(x,y) + \\ & \frac{1}{h^2}\Big(c_{0,0}u(x,y) + c_{-1,0}u(x-h,y) + c_{1,0}u(x+h,y) + \\ & c_{-1,-1}u(x-h,y-h) + c_{0,-1}u(x,y-h) + c_{1,-1}u(x+h,y-h) + \\ & c_{-1,1}u(x-h,y+h) + c_{0,1}u(x,y+h) + c_{1,1}u(x+h,y+h)\Big)\Big|\end{aligned}$$

Die durch den Stern beschriebene Diskretisierung heißt *konsistent* von der Ordnung p (bei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), falls es für jedes $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine Konstante $C > 0$ und ein $h_0 > 0$ gibt, so daß für alle $0 < h \leq h_0$ gilt: $\tau(h,u) \leq Ch^p$.

a) Sei $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Der Stern hat Konsistenzordnung p genau dann wenn $\tau(h,\pi) = 0$ für alle $\pi \in \mathcal{P}_{p+1}$ und alle $h > 0$.

b) Zeigen Sie: es gibt keinen 9-Punkt-Stern, der Konsistenzordnung $p \geq 3$ hat. *Hinweis:* betrachten Sie die Polynome $\pi_1 : (x,y) \mapsto x^2$ und $\pi_2 : (x,y) \mapsto x^4$.

15.2. Für die Advektionsgleichung

$$u_t + au_x = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

und regelmäßige Gitter mit Ortsschrittweite h und Zeitschrittweite k können für eine Parameter σ die folgenden expliziten Verfahren definiert werden:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - \sigma a^2 h \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0.$$

Für die Wahl $\sigma = h/(2ka^2)$ ergibt sich z.B. das Lax-Friedrichs-Verfahren aus der VO. Die Wahl $\sigma = k/(2h)$ liefert das sog. Lax-Wendroff-Verfahren.

a) Zeigen Sie, daß das Lax-Friedrichs-Verfahren stabil in der $\|\cdot\|_{l^\infty}$-Norm ist, wobei $\|V\|_{l^\infty} = \sup_i |V_i|$.

b) Zeigen Sie, daß unter der CFL-Bedingung $|a|k/h \leq 1$ das Lax-Wendroff-Verfahren stabil in der $\|\cdot\|_{l^1}$-Norm ist, welche gegeben ist durch $\|V\|_{l^1} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} h|V_i|$.

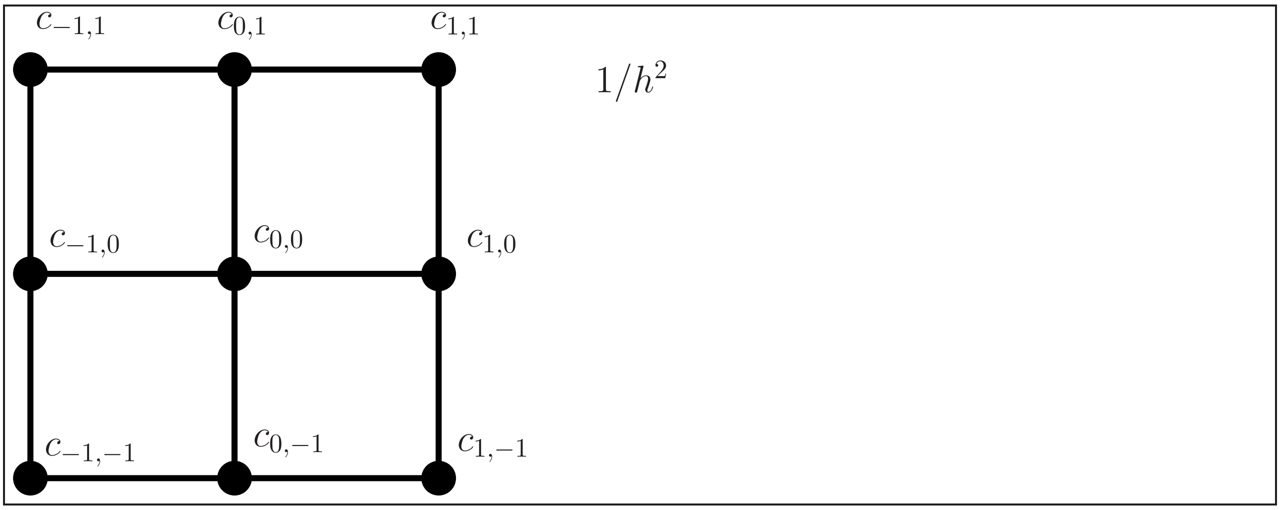

Abbildung 1: allg. 9-Punkt-Differenzenstern

c) Zeigen Sie, daß das Lax-Wendroff-Verfahren ein Verfahren der Ordnung 2 ist. Berechnen Sie hierzu den Konsistenzfehler $\tau_i^n := U_{kh}^{n+1} - EU_{kh}^n$, wobei E der Propagationsoperator für das Lax-Wendroff-Verfahren ist und $U_{kh,i}^n = u(x_i, t_n)$, wobei u eine glatte Lösung der Differentialgleichung $u_t + au_x = 0$ ist.

15.3. Zeigen Sie für die Gleichung (1) Stabilität des *upwind*-Verfahrens in der $\|\cdot\|_{l^2}$-Norm. Hier ist $\|V\|_{l^2}^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} h|V_i|^2$.

15.4. Betrachten Sie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ das Anfangswertproblem

$$u_t + au_x + b(x,t)u = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot).$$

Nehmen Sie an, daß $a > 0$ und b eine auf $\mathbb{R}^2$ definierte beschränkte Funktion ist. Formulieren Sie das *upwind*-Verfahren für diese Gleichung. Sei E der Propagationsoperator. Zeigen Sie: unter der CFL-Bedingung $ak/h \leq 1$ gilt $\|E\|_{l^1} \leq 1 + Ck$ für ein $C > 0$, welches nicht von k und h abhängt. Konvergiert Ihr Verfahren für glatte Lösungen? Was wäre die Ordnung?

15.5. (**Programmieraufgabe**) Programmieren Sie für das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= f(x,t), \qquad \text{auf } (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in (0,1) \end{aligned}$$

das Wendroff-Box-Verfahren. Für die Gitterpunkte $x_i = ih$ $(i = 0, \ldots, N)$ und $t_j = jk$ $(j = 0, \ldots,)$ stellt u_i^n eine Approximation an $u(x_i, t_n)$ dar. Die Approximationen u_i^n werden definiert durch folgende Vorschrift:

$$\begin{aligned} D_t^+ u_{i+1/2}^n + aD_x^+ u_i^{n+1/2} &= f_{i+1/2}^{n+1/2} \\ u_0^n &= 0 \qquad \forall n \\ u_i^0 &= u_0(x_i) \qquad i = 0, \ldots, N \\ f_{i+1/2}^{n+1/2} &= f(x_{i+1/2}, t_{n+1/2}), \qquad x_{i+1/2} = (i+1/2)h, \qquad t_{n+1/2} = (n+1/2)k. \end{aligned}$$

Weiters haben wir abgekürzt:

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^n &= \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right), \\ u_i^{n+1/2} &= \frac{1}{2}\left(u_i^{n+1} + u_i^n\right). \end{aligned}$$

Die "Vorwärtsdifferenzenoperatoren" D_t^+ und D_x^+ sind für eine Gitterfunktion $(u_i^n)_{i,n}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} D_t^+ u_i^n &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}, \\ D_x^+ u_i^n &= \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}. \end{aligned}$$

Ausgeschrieben ist damit das LGS für u_i^{n+1}:

$$\begin{aligned} &u_0^{n+1} = 0 \\ &\frac{u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} - u_i^n - u_{i+1}^n}{2k} + a\frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^n}{2h} = f_{i+1/2}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

für $i = 0, \ldots, N-1$.

Programmieren Sie das Verfahren für den Spezialfall $a = 1$. Testen Sie Ihr Programm für die glatte Lösung $u(x,t) = (1+t)\sin x$ (d.h. $f(x,t) = \sin x + (1+t)\cos x$).

Rechnen Sie mit Schrittweiten $k = h$ und $k = 100h$. Plotten Sie den maximalen nodalen Fehler in den Gitterpunkten (machen Sie $N = 1/h$ Zeitschritte) gegen die Schrittweite $h = 2^{-j}$, $j = 2, \ldots, 10$. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie? Ist die CFL-Bedingung notwendig?