Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 2, für den 21. 3. 2012

4. Untersuchen Sie die Kondition bezüglich Störung der rechten Seite (und exaktem Anfangswert). Betrachten Sie dazu die AWPe auf $[0, T]$:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0 \qquad \text{und} \qquad z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(0) = y_0.$$

   Es sei f Lipschitz-stetig im 2. Argument

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\,\|y - z\| \qquad \forall (t, z), (t, y) \in \Omega,$$

   und die Störung sei beschränkt

$$\|f(t, z) - g(t, z)\| \leq \varepsilon \qquad \forall (t, z) \in \Omega.$$

   Zeigen Sie, dass damit

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \varepsilon t\, e^{Lt}$$

   gilt.

5. Zeigen Sie: $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ impliziert $y \in C^3([0, T], \mathbb{R}^n)$.
   Hinweis: Kettenregel, Verwendung der Dgl.

6. Das implizite Eulerverfahren ist definiert durch das i.a. nichtlineare Gleichungssystem

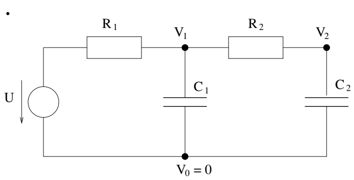
$$y_{j+1} = y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1}).$$

   Formulieren Sie das Newtonverfahren um y_{j+1} zu bestimmen. Implementieren Sie es. Wiederholen Sie Ü3 (Fadenpendel) mit dem impliziten Eulerverfahren.

   Hinweis: `CalcInverse (A, B)` berechnet $B := A^{-1}$

7. Betrachten Sie das elektrische Netzwerk:

   .



   Stellen Sie eine Dgl. für die Potentiale V_1 und V_2 auf.
   Wählen Sie die Werte $C_1 = C_2 = 0.001$, $R_1 = 1000$, $R_2 = 1$.
   Weiters sei $V_1(0) = V_2(0) = 0$, und $U(t) = \sin(\omega t)$.
   Bestimmen Sie die analytische Lösung.
   Hinweis: $V_i = A_i \sin(\omega t) + B_i \cos(\omega t) + C_i e^{-\lambda_1 t} + D_i e^{-\lambda_2 t}$

8. Wenden Sie das implizite und explizite Eulerverfahren auf das Beispiel aus Ü7 an. Setzen Sie $\omega = 1$ und $\omega = 1000$.

   Für welche Schrittweiten erhalten Sie vernünftige Ergebnisse ?

   Ist die Differentialgleichung steif ?