Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 3, für den 28. 3. 2012

9. (a) Untersuchen Sie die Stabilität vom impliziten Eulerverfahren unter Annahme der einseitigen Lipschitz-Bedingung mit $h\alpha < 1$. Zeigen Sie

$$\|\Psi^{t_{j+1},t_j}(y_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}(z_j)\|_2 \leq \frac{1}{1-h\alpha}\|y_j - z_j\|_2$$

   (b) Untersuchen Sie die Stabilität von der impliziten Mittelpunktsmethode

$$\begin{aligned} y_{j+1/2} &= y_j + h/2 f(t_j + h/2, y_{j+1/2}) \\ y_{j+1} &= y_j + hf(t_j + h/2, y_{j+1/2}) \end{aligned}$$

   unter Annahme der einseitigen Lipschitz-Bedingung mit $\alpha \leq 0$. Zeigen Sie

$$\|\Psi^{t_{j+1},t_j}(y_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}(z_j)\|_2 \leq \|y_j - z_j\|_2$$

10. f sei Lipschitz-stetig im 2. Argument (mit L). Zeigen Sie, dass die Gleichungen des Runge-Kutta Verfahrens

$$k_i = f(t + c_i h, y_{old} + h\sum_{l=1}^{s} a_{il}k_i) \qquad i = 1, \ldots, s$$

für h hinreichend klein (wie klein ?) eindeutig lösbar sind (Hinweis: Banach'scher FPS). Zeigen Sie weiters

$$\|k_i\| \leq \|f(t + c_i h, y_{old})\| + Ch$$

mit $C \leq ?$ und

$$\|y_{new} - y_{old}\| = O(h)$$

11. Zeigen Sie: Explizite RK - Verfahren mit s Stufen können maximal Konsistenzordnung s haben. Hinweis: Betrachten Sie die Dgl. $y' = y$, und zeigen Sie $y_{j+1} = p(h)y_j$ mit einem Polynom p der Ordnung s.

12. Formulieren Sie das Newton-Verfahren für implizite Runge-Kutta Verfahren. Implementieren Sie es analog zur Vorgabe für expl. RK - Verfahren. Stellen Sie diese beiden Verfahren zur Verfügung:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

implizites MP - Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

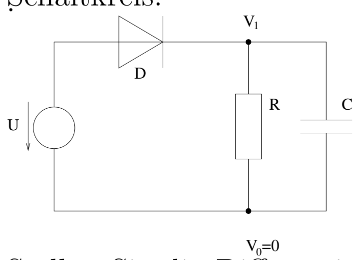
2-stufiges Gauß Verfahren

Wenden Sie die Verfahren auf das Pendel aus Ü 3 an.

13. Eine Diode D ist ein Bauteil mit nicht-linearer Strom-Spannungsfunktion

$$I(U) = I_S \,(e^{U/U_T} - 1)$$

wobei I_S und U_T gegebene, positive Parameter sind. Betrachten Sie folgenden Schaltkreis:



Es sei $U(t) = \sin(\omega t)$ mit $\omega = 1$, $R = C = 1$ $I_S = 0.001$ und $U_T = 0.2$.

Stellen Sie die Differentialgleichung auf. Weisen Sie eine einseitige Lipschitzbedingung nach. Berechnen Sie $V_1(t)$ auf $[0, T = 30]$ mit einem numerischen Verfahren Ihrer Wahl.

14. Betrachen Sie das Netzwerk aus Ü 7, mit $\omega = 1$. Setzen Sie Startwerte $V_1(0) = -1$, $V_2(0) = 1$. Vergleichen Sie numerische Ergebnisse für das implizite Eulerverfahren und die implizite Mittelpunktsregel, mit $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.