

Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 6, für den 2. 5. 2012

25. Sei $H(p, q) = V(q) + T(p)$. Betrachten Sie

$$\begin{aligned} p' &= -\frac{\partial H}{\partial q}, & p(0) &= p_0 \\ q' &= \frac{\partial H}{\partial p}, & q(0) &= q_0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen sie dass das symplektische Eulerverfahren

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= p_j - h \frac{\partial H}{\partial q}(p_{j+1}, q_j) \\ q_{j+1} &= q_j + h \frac{\partial H}{\partial p}(p_{j+1}, q_j) \end{aligned}$$

genau Konsistenzordnung 1 hat.

(b) Zeigen Sie dass das Störmer-Verlet-Verfahren

$$\begin{aligned} p_{j+\frac{1}{2}} &= p_j - \frac{h}{2} \frac{\partial H}{\partial q}(p_j, q_j) \\ q_{j+1} &= q_j + h \frac{\partial H}{\partial p}(p_{j+\frac{1}{2}}, q_j) \\ p_{j+1} &= p_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \frac{\partial H}{\partial q}(p_{j+\frac{1}{2}}, q_{j+1}) \end{aligned}$$

mindestens Konsistenzordnung 2 hat.

26. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$q'' = f(q), \quad q(0) = q_0, \quad q'(0) = q'_0.$$

Ersetzt man die 2. Ableitung durch einen Differenzenquotienten so erhält man das Verlet-Verfahren

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= 2q_j - q_{j-1} + h^2 f(q_j) \\ q_0 &\text{ gegeben} \\ q_1 &= q_0 + h q'_0 + \frac{h^2}{2} f(q_0). \end{aligned}$$

Ein äquivalentes System 1. Ordnung ist

$$\begin{aligned} q' &= p & q(0) &= q_0 \\ p' &= f(q) & p(0) &= q'_0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie dass das Verlet-Verfahren äquivalent zum Störmer-Verlet-Verfahren

$$\begin{aligned} p_{j+\frac{1}{2}} &= p_j + \frac{h}{2}f(q_j) \\ q_{j+1} &= q_j + hp_{j+\frac{1}{2}} \\ p_{j+1} &= p_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}f(q_{j+1}) \end{aligned}$$

ist.

27. (a) Zeigen Sie dass für reguläres $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisches $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} A & \\ & A^{-\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \begin{pmatrix} I & B \\ & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

symplektisch sind.

- (b) Zeigen Sie dass für symplektische Matrizen $K, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das Produkt KL auch wieder symplektisch ist und für reguläres K die Inverse ebenfalls symplektisch ist.
- (c) Zeige Sie dass die Jacobimatrix

$$\frac{d(p_{j+1}, q_{j+1})}{d(p_j, q_j)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{j+1}}{\partial p_j} & \frac{\partial p_{j+1}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial q_{j+1}}{\partial p_j} & \frac{\partial q_{j+1}}{\partial q_j} \end{pmatrix}$$

(siehe Vorlesung) des symplektischen Eulerverfahrens symplektisch ist (und damit auch das Verfahren).

28. Implementieren Sie das symplektische Eulerverfahren und das Störmer-Verlet-Verfahren und testen Sie es für das Fadenpendel ($H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q)$). Plotten Sie die Energie $H(p_n, q_n)$. Ersetzen Sie die Basisklasse `ODE_Function` durch eine Basisklasse `Hamiltonian`, und stellen Sie zumindest folgende virtuelle Funktionen zur Berechnung von H , $\frac{\partial H}{\partial p}$, und $\frac{\partial H}{\partial q}$ zur Verfügung:

```
virtual double Eval (const Vector & p, const Vector & q);
virtual void EvalDp (const Vector & p, const Vector & q, Vector & dHdp);
virtual void EvalDq (const Vector & p, const Vector & q, Vector & dHdq);
```