Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 7, für den 9. 5. 2012

Eine Funktion $I : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt Invariante der Differentialgleichung $y' = f(y)$, falls

$$I(y(t)) = \text{const}$$

für alle Trajektorien gilt.

29. Zeigen Sie, dass I genau dann eine Invariante ist, falls

$$\nabla I(y) \cdot f(y) = 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d$$

Zeigen Sie, dass lineare Invarianten (d.h. I ist affin-linear) von autonomisierbaren, konsistenten ($\sum b_i = 1$) RK - Verfahren erhalten werden.

30. Zeigen Sie, dass quadratische Invarianten $I(y) = x^t C x$ von autonomisierbaren, konsistenten s-stufigen RK - Verfahren erhalten werden, falls

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, s$$

gilt. Welches 1-stufiges RK Verfahren erfüllt diese Eigenschaft ?

31. (**Splitting Methoden**) Zerlegen wir f additiv als $f(y) = f_1(y) + f_2(y)$, wobei wir annehmen, dass die Dgls $y' = f_1(y)$ und $y' = f_2(y)$ einfach lösbar sind. Die entsprechenden Flüsse sind φ_1^t und φ_2^t. Wir definieren das "numerische" Verfahren (Lie-Trotter Splitting) als

$$y_{j+1} = \varphi_2^h(\varphi_1^h(y_j)),$$

d.h. der diskrete Fluss ist $\varphi_2^h \circ \varphi_1^h$. Zeigen Sie dass dieses Verfahren Konsistenordnung 1 hat.

32. (**Strang Splitting**). Wie Bsp 31. Jetzt definieren wir den numerischen Fluss als $\varphi_1^{h/2} \circ \varphi_2^h \circ \varphi_1^{h/2}$. Zeigen Sie dass das Verfahren Konsistenzordnung 2 hat.

33. Interpretieren Sie das symplektische Eulerverfahren (für separable Hamiltonfunktionen) als Lie-Trotter-Splitting, und zeigen dadurch unmittelbar Konsistenzordnung 1. Zeigen Sie analog den Zusammenhang des Störmer-Verlet Verfahrens mit dem Strang Splitting.

Vorbereitung für nächste Übung: Übersetzen Sie den Rattle - DAE Löser von der Homepage.