Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 9, für den 23. 5. 2012

38. Modelliere Sie Wärmeleitung auf dem Intervall $[a, c]$ mit 2 Materialien mit unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten k_1 auf $[a, b]$ und k_2 auf $[b, c]$. Weiters seien Dirichletrandwerte gegeben, nämlich

$$u(x) = u_g(x) \quad x \in \Gamma_D = \{a, c\}.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung für $k_1 = 10$, $k_2 = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $c = 1$, $u_g(a) = 0$, $u_g(c) = 1$, und $f = 1$.

39. Diskretisieren Sie die Differentialgleichung aus 38 mittels finiter Differenzenmethode (FDM) mit konstanter Schrittweite h. Die dabei entstehende Matrix soll symmetrisch und positiv definit sein. Implementieren Sie das Verfahren und plotten Sie $u(x)$ und den Wärmefluss $ku'(x)$.

40. Beweisen Sie die diskrete Friedrichsungleichung, Lemma 3 aus dem Skript.

41. Verbessern Sie die Konvergenzanalysis der FDM für Neumannrandbedingungen. Wählen Sie dazu die diskreten Normen

$$\|v_h\|_{X_h}^2 = h \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 + v_n^2 \qquad \text{und} \qquad \|v_h\|_{Y_h}^2 = h \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 + h^2 v_n^2.$$

Zeigen Sie:

- Konsistenzfehler: $\|A_h I_h^X u - I_h^Y Au\|_{Y_h} = \mathcal{O}(h^2)$
- Stabilitt: $\|A_h^{-1}\|_{Y_h \to X_h} \leq C$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $|v_h(1)| \leq c\,|v_h|_{H^1,h}$ für $v_h \in l_2(\overline{\omega})$ mit $v_h(0) = 0$ und $\|v_h\|_{X_h} \leq c\,|v_h|_{H^1,h}$.