

## Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 10, für den 30. 5. 2012

42. 1D Poissongleichung mit stückweise konstanten Koeffizienten mit FEM: Wir betrachten nochmal das Problem aus Aufgabe 38/39. Diesmal jedoch mit der Finite Elemente Methode. Leiten Sie die Variationsformulierung her.

Hinweis: Multipliziere Sie mit  $v \in H^1((a, c))$ , integrieren, wenden partielle Integration auf Teilintervalle an und verwenden die Interfacebedingungen bei  $b$ .

43. Stellen Sie für die Variationsformulierung aus Aufgabe 42 das FEM Gleichungssystem für die stw. linearen Hut-Basisfunktionen auf. Bestimmen und plotten Sie die FEM-Lösung  $u_h$  für  $h = 0.1, \dots, 0.01$ .

44. Beweisen Sie die Interpolations - Fehlerabschätzung

$$\int_0^h (u'(x) - (I_h u)'(x))^2 dx \leq ch^2 \int_0^h (u''(x))^2 dx,$$

wobei  $I_h : C([0, h]) \rightarrow P^1$  der Interpolationsoperator mit  $(I_h u)(0) = u(0)$  und  $(I_h u)(h) = u(h)$  ist. Die Konstante  $c$  hängt weder von  $h$  noch  $u$  ab. Sie dürfen  $u \in C^2$  annehmen.

45. Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= 1 & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 1 \end{aligned}$$

mit der  $p$ -FEM.

Wählen Sie dazu den endlich dimensionalen Teilraum

$$V_p := P^p$$

mit der Monombasis  $\varphi_i = x^i$  mit  $i = 0, \dots, p$ . Berechnen und plotten Sie die diskreten Lösungen  $u_p(x)$  für  $p = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ .